

**ТРИДЦАТЬ ВТОРАЯ**

**ХРЕСТОМАТИЯ**

По истории теории вероятностей и статистики  
составитель О. Б. Шейнин

Берлин  
2020

## Содержание

**I:** В. И. Арнольд, Истории давние и недавние

**II.** Л. В. Некраш, Теория статистики и теория вероятностей,  
1947

**III.** П. П. Пермяков, История комбинаторного анализа,  
1980

**IV.** К. Р. Бирман, Задачи генуэзского лото, 1957  
oscar.sheynin@gmail.com

### Предварительные замечания

Во всём сборнике принято обозначение

**S, G, i**: скачиваемый документ *i* на русском языке на нашем сайте [www.sheynin.de](http://www.sheynin.de). Сайт перепечатывает Google, см. Oscar Sheynin.

Мы сокращаем давно уже устаревший термин *математическое ожидание* и пишем просто *ожидание*. Этот устаревший термин ввёл Лаплас, чтобы отличить классическое ожидание от ставшего модным (но с тех пор забытого) морального ожидания

## В. И. Арнольд

### Истории давние и недавние

#### Предисловие

Весной 1998 года парижская полиция подобрала меня, лежащего без чувств с пробитым лбом рядом с моим велосипедом, и доставила в больницу. За несколько недель французские врачи вытащили меня из бессознательного состояния. Но я не узнавал сына и сказал о жене: «Эта женщина утверждает, что она моя жена». Врач поинтересовалась: «А сколько лет вы женаты?» Я правильно ответил: «Двадцать четыре». Врач записала: «Арифметические способности сохранены».

Потом французские врачи говорили мне, что при таких повреждениях мозга любой француз умер бы сразу. «Но русские — двуязычные, — добавили они. — Несколько месяцев ещё проживете». В западном учебнике я прочёл о смертельных дозах ядов: «Что касается алкоголя, то для русских смертельная доза в несколько раз выше». Видимо, с травмами дело обстоит аналогично.

Впрочем, когда я и через полгода не умер, а напротив, стал выздоравливать, то врачи нашли для этого научное оправдание: они обнаружили, что я, не зная того, переученный левша. А в таком случае неповреждённое полушарие мозга может временно взять на себя функции повреждённого, пока то не оправится, что и произошло.

Французские врачи запретили мне не только заниматься математикой, но и писать о ней. Однако отвечать на письма многих друзей не запрещалось. Из таких ответов и возникли многие тексты, собранные в этой книжке. Я не думал тогда об их издании, поскольку считал в то время, что вот-вот умру.

Необычным оказалось то, что у этих записей были черновики (обычно я сразу пишу на нужном языке набело). И когда я наткнулся на эти черновики пару лет спустя, то понял, что читать их интересно не только мне. При подготовке записей к изданию

кое-что пришлось уточнять, пояснять, дописывать; заодно были написаны несколько новых историй. Так получилась эта книжка.

## Первые воспоминания

Первые мои воспоминания — село Редькино под Востряковым; думаю, июнь 1941 года. Солнце играет на внутренности сруба, смолятся сосновые бревна; на речке Рожайке — песок, пережат, синие стрекозы; у меня была деревянная лошадка «Зорька» и разрешалось мне покормить с руки куском чёрного хлеба с солью здорового коня. Конь таскал сеялку и после жнейку, сиденье железное в дырочках — мечта!

Но вот началась война: бомбоубежище в Москве на Трубниковском; роем окопы (щели) в своем саду (на Спасопесковском, дом 8); театр Вахтангова разбомблен при попытке попасть в Бородинский мост; лучи прожекторов, самолёты, осколки ...

Эвакуация в Казань и потом в Магнитогорск. В Казани я спал у Чеботарёва под роялем, но помню больше кино в парке — паровоз идёт на нас с простыни... Потом Магнитогорск — совсем другой мир: просо, огороды, дежурства. Друзья: Катаевы, Урновы — в том же доме. «Красная Шапочка» на Новый год (девочек не было, роль Шапочки досталась мне). Начал учить французский (бабушка долго жила в Страсбурге с братом Л. И. Мандельштамом и у меня, говорят, до сих пор сохранился страсбургский акцент). Первая книжка — «Робинзон Крузо», позже «Таинственный остров». Писать я всё же сперва научился по-русски. И родители, и бабушка болтали свободно по-английски, по-немецки и по-французски, но я понимал только французский.

За молоком — в деревню. Веретено и пряжа. Меню. Сбор урожая проса и картошки с нашего участка. Проливные дожди и потоп. Люди тонули, не могли вернуться с участков. Мать преподавала английский кому-то в дирекции завода, за ней приезжал роскошный автомобиль с откидными сиденьями (линкольн, кажется).

## Северо-западное направление

В эвакуации в Магнитогорске у нас часто бывала Надежна Ивановна Слонова, актриса Московского театра сатиры. В своих опубликованных в виде книги воспоминаниях она рассказывает, что, зайдя однажды, застала одного меня, пятилетнего. «Где мама?» — спросила гостя. «Ушла!» — «Куда?» — «В северо-западном направлении». Мне так было понятнее!

Сейчас я узнал, что некоторые папуасские племена только так и указывают направление: наши бессмысленные «вперед», «налево» и т. п. не употребляют. Но, кажется, помещённые среди европейцев, их дети тотчас обучаются нашей ерунде.

Из Магнитогорских воспоминаний помню велосипед, сделанный мне отцом из танкового катка (он работал на бронетанковом заводе, преподавал математику). Но и я ему помогал: когда он пытался найти для четырёхногой табуретки место на полу, чтобы все её ножки опирались, то я сказал: «Ты уже повернул её больше, чем на  $90^\circ$ , и не вышло — значит табуретка кривая, без пилы не обойтись!»

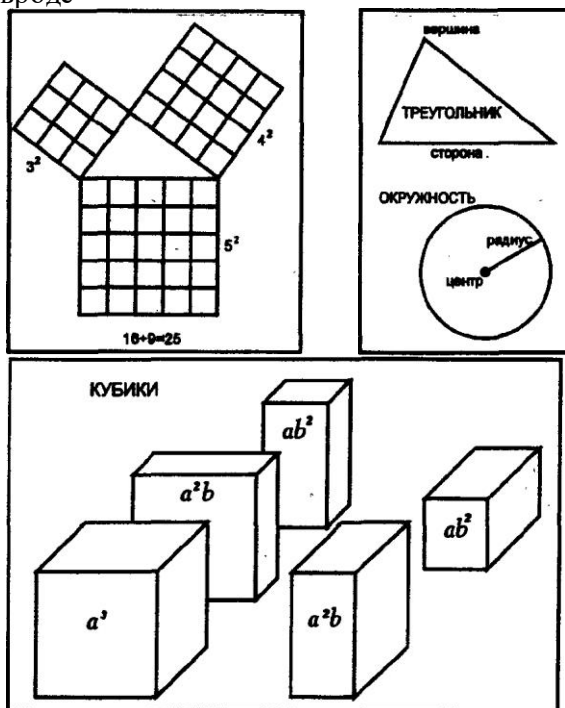
В семь лет, уже в Москве, я увёл брата (ему было четыре) обходить Садовое кольцо и благополучно обошёл за три часа его 16 км. Родители не боялись, однажды, правда, защищая брата, я чуть не убил (сапёрной лопаткой) соседского мальчишку, так что скорее боялись меня, чем я.

Помню ещё, как я защищал брата от его попытки, бросая камни, разбить окно в трамвае — это могло кончиться, как с соседским парнем, Магнитогорской больницей.

## Вера Степановна Арнольд (Житкова)

Вера Степановна Арнольд, отца мать, была большевичкой и бестужевкой, в 1905 г. посажена, но отпущена за границу (в Париж и Цюрих) лечиться. Отец учился в гимназии в Цюрихе, сохранял карты своих походов, резал по дереву; Колмогоров, позже учившийся с ним в аспирантуре МГУ, говорил мне, что была в отце какая-то не русская обязательность и добросовестность.

Он рано начал показывать мне математику, вывешивая у кровати плакаты вроде



Но я не знал, что это математика, думал, что просто игрушки. Задач не помню. Помню скалолазные упражнения на пятиметровых стенках, не падал, но освоил нужду в трёх опорах.

Братом Веры Степановны был писатель Борис Степанович Житков. Отличные воспоминания об обоих оставил Корней Иванович Чуковский, учившийся с Житковым в одном классе гимназии в Одессе. Рассказы Житкова и, особенно, его книжка



«Что я видел», одним из героев которой была наша собака, пудель Инзол, входила в число моих первых книг. В семье считалось, что меня роднит с Б. С. и деспотический характер (об этом свойстве характера Б. С. хорошо написал в своих воспоминаниях Е. Шварц\*), и умение рассказывать, и специфическая любовь к географии дальних странствий и картам. Житков умер в 1938 г., мне досталась от него семейная астрономическая труба времён Крымской войны (в которой участвовали четыре адмирала из семьи Житковых).

Прадед, Степан Васильевич Житков (у могилы которого в Ваганькове похоронены и мои бабушка, отец и мать) был первым из шести поколений математиков в нашей семье (седьмое – мои малолетние правнуки – пока ещё не выбрали себе специальности). Хотя прадед командовал в банке, а учебники математики писал уже заодно, всё же от своих детей он ежевечерне требовал отчёта: «А что ты сегодня сделал для меньшого брата?» (т.е. для эксплуатируемых трудящихся). В результате все они выросли революционерами, а его сын женился на племяннице Плеханова.

Главная книга этого сына, Б. С. Житкова, «Виктор Вавач», описывает революцию 1905 г. и, на мой взгляд, содержит портреты большинства членов этой яркой семьи. Книга была закончена в 1938 г. и уже набрана, но её публикацию остановил Фадеев, сказавший, что уж чересчур она правдива. Тираж был уничтожен, но, к счастью, Лидия Корнеевна Чуковская ухитрилась спасти в редакции один экземпляр, и теперь (60 лет спустя) книгу она издала.

На меня сильно влияли обе бабушкины сестры. Химик и художник тётя Саша пыталась исправить мою манеру рисовать и мои акварели, но я до сих пор не убеждён её рекомендациями использовать для рисования рассудок, выбирать выигрышные сюжеты и освещение, и даже часть листа бумаги. Я же всё ещё считаю такие хитрости унижительными и для рисования, и для математики, и для других искусств: главное – быть мастером!

\* Шварц описывает жестокую борьбу между Житковым и Маршаком за первенство в издаваемом всеми ими детском журнале: ежедневно приходилось решать, кому заказывать рисунки, Бианки или Ватагину, Чарушину или Конашевичу, и никто не хотел уступить.

Тётя Саша пыталась учить моего брата то спектральному анализу, то взрывчатым веществам, но он всё же выбрал не химию, а физику, и работает теперь в Институте атомной энергии им. Курчатова.

Художником же стал не я, а моя сестра Катя, которой был год (а мне – одиннадцать), когда умер наш отец (так что с тех пор мне пришлось играть его роль в её воспитании). Она издала множество английских книг для повышения культуры американцев со своим текстом и своими же рисунками про Бабу Ягу, про собирание грибов и т. д.; теперь их перевели на разные языки, вплоть до японского. Но в последние годы, выйдя из-под моего влияния, Катя переквалифицировалась и стала обучать живописи не американцев, а слонов. По её словам, особенно талантливы молодые тайландские слонята, только обязательно надо их учить не по одному, а целыми дюжинами. Каждый слонёнок выбирает себе прямоугольный участок на полотне, а затем они, рисуя, учатся друг у друга и соревнуются: у кого лучше получится. Картины их всегда совершенно абстрактные, ярко красочные и, думаю, пользующиеся большим спросом среди американцев.

Другая сестра Веры Степановны, тётя Надя, преподавала французский в Институте иностранных языков. Для неё я должен был каждую неделю писать по-французски сочинение на какую-нибудь интересующую нас обоих тему, от стихов Пушкина до французских эпиграмм XVII века, от истории и архитектуры Риги до географии озёр Валдайской возвышенности, от рациона и повадок медведей разных цветов до моей сушилки лыжной одежды у печки при ночёвке в избе близ Парамоновского оврага на Волгуше.

Но, к сожалению, сколько тётя Надя ни полировала мой французский, я и до сих пор пишу с не меньшим числом ошибок, чем большинство французских математиков, и не смог бы правильно написать приготовленный Мериме для двора Наполеона III диктант (где требовалось различать орфографию звучащих одинаково названий частей туш разных животных). Не сумел я ни тогда, ни когда-либо позже полюбить стихи Гюго, восхищение которыми французов остаётся для меня тайной французской души (их любовь к стихам Гюго кажется мне сходной с преклонением русских XIX века перед романом Чернышевского).

Мой дед, Владимир Фёдорович Арнольд, окончив Тимирязевку, занимался математической экономикой в стиле Вольраса и Парето и даже переписывал теории Маркса об обмене топоров на полотно в виде дифференциальных и конечно-разностных уравнений.

Вера Степановна спаслась от репрессий каким-то чудом и искусством, накопленным подпольщицей до революции. Она, смеясь, читала не то в «Правде», не то в «Известиях», статьи, где она упоминалась как давно погибшая революционерка. Вернувшись после революции в Россию, она стала сперва высокопоставленным работником в области статистики, порой заведовала кафедрой в Университете, порой губернским статбюро (в Одессе), позже была членом коллегии ЦСУ в Москве. Но когда рядом начали сажать (в конце 20-х годов), она быстро бросила все свои ответственные посты и занялась искусством: она снимала у себя на столе диафильмы (например, по басням Крылова и детским сказкам), героев которых лепила из пластилина, а декорации к которым (включая тропический лес) делала из дров.

После войны, в Москве, стол был занят изготовленным ею из глины и пластилина морем, на котором устанавливали модели военных кораблей и снимали стереокадры для тренировок морских офицеров.

## Первые научные воспоминания

Быть может, наибольшее научное влияние оказали на меня из числа моих родственников двое моих дядьёв: Николай Борисович Житков (сын брата моей бабушки писателя Бориса Житкова, инженер-буровик) за полчаса объяснил двенадцатилетнему подростку математический анализ (иллюстрируя его параболоидальной формой поверхности чая, вращающегося вокруг оси в стакане), а Михаил Александрович Исакович (брат моей матери, физик) пробовал на мне многочисленные задачи и главы учебника физики, который он писал в составе большого коллектива, руководимого Г. С. Ландсбергом (оба были учениками Л. И. Мандельштама, крупнейшего физика и радиотехника, брата другой моей бабушки).

Свой первый научный доклад я сделал в возрасте лет десяти в «добровольном научном обществе», организованном Алексеем Андреевичем Ляпуновым у себя дома. Там мы занимались то физикой, то биологией (включая запрещённую генетику и кибернетику), то космологией, то геологией. Мой доклад был об интерференции волн, с опытами в ванне, с описанием определения положения самолёта над Тихим океаном по пересечению двух гипербол (заданных разностями фаз сигналов от трёх радиостанций): заодно я разобрал и объяснил теорию конических сечений, сферы Данделена, переход от эллипсов к параболам и к гиперболам, с одной стороны, и принцип Гюйгенса теории распространения волн, с другой. «Общество» собиралось еженедельно, и мы все сохранили наилучшие отношения, хотя в дальнейшем занимались разными вещами: один стал знаменитым кардиологом, несколько членов общества теперь академики РАН.

На время весенних школьных каникул мы отправлялись в деревню, на хутор мельничихи Магдалины Петровны близ Пушкинского Захарова. Однажды (мне было, вероятно, лет одиннадцать) мы — члены «Общества» — втроём побежали на лыжах километров за двадцать по лесу без лыжни в Можинку (около Звенигорода), где жили Ляпуновы. Карты у нас не было, но бежать надо было почти точно на север. Ляпуновы благополучно напоили нас чаем, но обратный путь на лыжах оказался труднее, так как, во-первых, стемнело, а во-вторых, лёд на Москве-реке,

которую нам надо было опять перейти, уж очень трещал (вскрылась же она только на следующий день, так что под лёд я всерьёз провалился лишь десятию годами позже). Кончилась эта экспедиция благополучным возвращением, благодаря вошедшей луне, мы прибежали домой даже раньше полуночи.

С тех пор я бегаю по этим местам каждый март, впоследствии со своими учениками, причём длина трассы (продолженной до Опалихи) достигает 60 км, а некоторые речки преодолевать приходится иногда вплавь.

Быть может, главным для меня выводом из моих частых детских разговоров с замечательными учёными разных специальностей было ощущение глубокого единства всех наук (включая не только математику, физику и астрономию, но и лингвистику, и археологию, и генетику), да и всей европейской культуры, от Лукреция до Бенвенуто Челлини и от Марка Аврелия до капитана Скотта. Один и тот же человек мог рассказывать нам и об особенностях греческого театра, и о квантово-механическом соотношении неопределённостей. Алексей Андреевич Ляпунов, математик и логик, демонстрировал детям теорию Канта – Лапласа образования Солнечной системы, вращая в колбе смесь анилина с глицерином, пока анилин не собирался в подобные планетам шары. И он же давал нам читать сочинения шлиссельбуржца Морозова, обсуждавшего историческую хронологию с астрономических позиций; но при обсуждении этих проблем никогда не возникал тот вздор, которым их окружили безответственные продолжатели Морозова позже.

Удивительно, сколь много могут перенимать дети от людей этого «нобелевского» уровня просто в повседневном общении.

## Род Арнольдов

Род Арнольдов происходит от прусского офицера Петрэ Арнольда, убившего друга на дуэли и спасшегося в России XVIII века от преследований своего жестоко наказывавшего за дуэли короля. Его потомки были уже офицерами русской службы, дойдя даже до генеральских чинов и должности предводителя дворянства. Среди их жён встречаются и шведка, и персиянка, и француженка, но жили все всегда в России, и большинство жён были исконно русскими. Мой дед, экономист и математик Владимир Фёдорович Арнольд, умер в 1918 г. в Херсоне.

Дед по матери, Александр Соломонович Исакович, жил в Одессе, и был адвокатом до того, как его арестовали в 1938 г. в соответствии с общим планом распределения репрессий по специальностям. За год до этого его уже арестовывали, но выпустили, сказав ему, что он им уже больше не нужен, «так как план на этот месяц уже выполнен».

Через некоторое время после ареста семье ответили, что он «признал себя шпионившим в пользу Германии, Англии, Греции и Японии», и отправлен в концлагерь «на 10 лет без права переписки». Зловещий смысл этой формулировки тогда ещё не был известен (до доклада Хрущева оставалась пара десятков лет), и родственники регулярно обращались в соответствующие органы за справками и пытались помочь. Было получено несколько противоречивших друг другу ответов: «сослан туда-то», «болен (в совершенно другом месте)», «скончался от болезни сердца (с датой смерти до предыдущего ответа о болезни)». Наконец, уже во время перестройки, родственникам показали всё чудом сохранившееся дело, и выяснилось, что нелепое и внутренне противоречивое "признание" было добыто обычной в то время технологией, а приговор к расстрелу был приведен в исполнение примерно через неделю после ареста. Это объяснение содержало также утверждение о полной реабилитации деда.

Странное обвинение в шпионаже в пользу враждебных друг другу стран имело, однако, некоторое обоснование. Дело в том, что дед, по своим профессиональным обязанностям, занимался также по линии Красного Креста розыском в пределах СССР родственников умерших за границей эмигрантов, оставивших этим,

находившимся в СССР, своим родственникам наследства. Поэтому дед получал письма из зарубежных стран и даже отвечал на них — отсюда и происходит странный список: Германия, Англия, Греция, Япония.

Трудно сказать, сколько миллионов долларов недополучил Советский Союз вследствие расстрела деда. Во всяком случае, эти потери во много раз превышали "пользу" от его преследования.

Тот факт, что меня в 1954 году приняли учиться в Московский университет, несмотря на судьбу деда, является, конечно, следствием смерти Сталина с одной стороны и, с другой стороны, желанием ставшего тогда ректором МГУ математика Ивана Георгиевича Петровского по возможности помогать и науке, и пострадавшим семьям. Много позже он рассказывал мне: «Они вызвали меня в партком и кричали: "За такое ты ответишь, положишь партбилет на стол!" Сердце стучало, но я про себя повторял: "А вот и не положу! А вот и не положу!"» Мало кто знал и мог представить, что Иван Георгиевич, ректор Московского Университета и член «коллективного президента страны» (Президиума Верховного Совета), ведавший представлениями к амнистии и реабилитации, никогда не был членом коммунистической партии. Но на самом деле его административная карьера была во многом основана не на его коммунистичности (он был даже внуком священника и сам поступил в Университет лишь благодаря своей службе дворником в детском саду), а на его хорошем преподавании математики студентам инженерных специальностей, один из которых, А. Н. Косыгин, в будущем сделался Председателем Совета Министров СССР и инициатором первого проекта экономической реформы в СССР.

Недавно я прочёл в книге одного из творцов водородной бомбы, В. Л. Гинзбурга «О науке, о себе и о других» (М.: Физматлит, 2001, с. 389), что брат моей бабушки, один из крупнейших советских физиков Л. И. Мандельштам, не получил Нобелевской премии за своё (вместе с Г. С. Ландсбергом) открытие комбинационного рассеяния света (1928 г.) из-за того, что он недостаточно занимался писанием статей о своём открытии, особенно на западных языках, вследствие того, что в этот момент был арестован один из его

родственников, и он больше тратил сил на спасение арестованного, чем на публикацию своих достижений. Нобелевскую премию за это открытие всё-таки вскоре дали, но не ему, а индусским физикам, выполнившим похожие экспериментальные исследования на неделю позже, так что теперь обнаруженное явление часто называют поэтому «Раман-эффект» (эксперименты Ландсберга с Мандельштамом и Рамана с Кришнаном были разными).

Из книги Гинзбурга я узнал также, что частые обвинения Нобелевского комитета в неправильном выборе лауреатов (и в том числе в дискриминации СССР и России) не всегда достаточно учитывают то обстоятельство, что сами российские учёные зачастую недостаточно активны в выдвижении и поддержке своих коллег в качестве кандидатов на премию (это применимо и сегодня, и не только к Нобелевским премиям).

Так или иначе, влияние Л. И. Мандельштама на советскую, российскую (и особенно Московскую) физическую школу было совершенно исключительным. Перечислю лишь несколько знаменитейших из его учеников разных поколений: Н. Н. Папалекси, Г. С. Ландсберг, И. Е. Тамм, А. А. Андронов, М. А. Леонтович, С. М. Рытов, ...

Сам Леонид Исаакович Мандельштам учился до Первой мировой войны в Страсбурге у Брауна (и в этом смысле был научным внуком Рентгена). Вместе с Папалекси они были создателями советской радиофизики, с Ландсбергом – оптики, с Леонтовичем – туннельной теории радиоактивного альфа-распада, впоследствии развитой Г. Гамовым.

Игорь Евгеньевич Тамм был впоследствии одним из главных действующих лиц в создании водородной бомбы, а уже в 1928 г. в своём учебнике теории электричества он описал магнитные поверхности, впоследствии сыгравшие решающую роль в системах для управляемого термоядерного синтеза вроде Токамака, предложенного им совместно с А. Д. Сахаровым. Нобелевскую премию 1958 г. И. Е. Тамм (с И. М. Франком и П. А. Черенковым) получили за создание в 1937 г. теории открытого в 1934 г. излучения С. И. Вавилова – П. А. Черенкова, теории, которая, по его мнению, не была его лучшей работой: его вклады в теорию ядерных сил и методы расчета сложных ядер давно вошли в



мировой фонд физики.

Таммы и Леонтовичи, Ландсберги и Папалекси входили в число ближайших друзей моих родителей, и я имел счастье немало разговаривать с ними с ранних лет.

Больше возражений, чем физики, всегда вызывал у меня (в возрасте около 10 лет) другой наш родственник, А. Г. Гурвич, у которого я тоже бывал почти каждую неделю. Недавно я встретил в иностранной научной печати несколько восторженных отзывов на его старую теорию «биологического поля» (достойную, согласно этим отзывам, Нобелевской премии).

Сущность этой теории состояла в том, что клетки, в процессе роста организма, обмениваются информацией посредством излучения специального вида, которое *не имеет физической природы и улавливаются только растущими же клетками* (в качестве детекторов применялись обычно корни проросших семян).

В этой теории меня всегда отпугивал ее чрезвычайно абстрактный характер с рассуждениями вроде: «Поскольку мы об этом излучении ничего не знаем, кроме того, что физические приборы его не воспринимают, то она ...». Подобные отрицательные доводы не убеждали меня, десятилетнего и недостаточны даже сейчас. Конечно, я не мог проверить проводимые в этой школе опыты (довольно тонкие). Но в современных иностранных панегириках теории биологического поля Гурвича я прочел, что сейчас удалось повысить чувствительность физических детекторов настолько, что они стали воспринимать это излучение, оказавшееся ультрафиолетовым электромагнитным, причём многие вызывавшие сомнение наблюдения работ с биологическими детекторами теперь подтвердились.

В этих современных иностранных работах столь же восторженно описывается более новая российская теория гауссовой кривой вероятностей любых случайных отклонений, теория, согласно которой эта колоколообразная кривая, построенная экспериментально, всегда так осциллирует около гауссова распределения, что она имеет стандартное число максимумов (кажется, пять).

Здесь я вовсе не берусь судить о добросовестности приводимых экспериментальных данных, но могу только гордиться тем, что моя жена, врач, с трудом спасла однажды автора этой новой российской теории, когда он начал умирать у нас в гостях, так как его жена пробовала на нём, безопасны ли для жизни пациента разрабатываемые ею химические препараты.

## Домашняя библиотека

В отцовской библиотеке половина книг была на иностранных языках, и мне дозволялось рыться во всей библиотеке по своему разумению, только иногда меня предупреждали, что какую-нибудь книгу «лучше не читать до 30 лет, чтобы не испортить впечатления». Станным образом, я не стремился специально читать то, что не рекомендовалось. Например, в многотомном Парижском полном собрании Мопассана мать ногтем отметила мне рекомендуемые названия, и я действительно, долго не читал других (по-французски я научился читать немного раньше, чем по-русски, и, между прочим, когда после мозговой травмы я месяц пролежал в больнице без сознания, то, придя в себя, вначале понимал только французский и только по-французски говорил, позже присоединился английский, и лишь затем русский).

Мне долго казалось, что второпях, когда нет времени перечесть и исправить, я, на каком бы языке ни писал, пользуюсь скорее немецкой грамматикой с длинными сложными предложениями, не пренебрегая возможностью вставить в конце фразы отрицание. Я думал, что это связано с немецкими генами Арнольдов, но позже лингвисты разъяснили мне, что немецкая грамматика обладает какой-то фундаментальной примитивностью, которая была когда-то присуща и всем языкам, но от которой другие, в процессе совершенствования, в конце концов удалились.

Из нематематических книг меня поразила полка, где, наряду с необыкновенно старой и растрепанной копией «Путешествия из Петербурга в Москву» были иностранные книги о карбонариях. Только теперь я начинаю понимать, что Радищев, карбонарии и антицаристские революции в России не независимы: старшие в семье на мои недоуменные вопросы о порядке книг на полках отвечали невразумительно, дескать, БСЭ и Брокгауз и Ефрон стоят всё же рядом.

Из математических книг (которых было много) я сперва прочел курс анализа Грэнвилля и Лузина, который легко понял, так как уже крутил чашку с чаем на диске патефона. Кроме патефонного диска я соорудил для этого опыта вертушку на базе велосипеда. Она позволила также осуществить стробоскопическое освещение, свет которого, как в кино, периодически прерывается

вращающимся диском с отверстиями. При стробоскопическом освещении не слишком сильной параболически бьющей вверх струи воды она на вид разбивается на капли. Меняя скорость вращения диска, можно даже "остановить" эти капли или "заставить их двигаться назад".

Книги коллекции Бореля наводили на меня скуку; Лопиталь и Гурса, которого так заклемили Бурбаки, были куда интереснее, и я их читал охотнее. Была еще многотомная немецкая математическая энциклопедия под редакцией Ф. Клейна, благодаря которой я освоился с готическим шрифтом, все эти старые книги ещё не отличались тем пренебрежительным отношением к читателю, которое стало теперь стандартным и из-за которого в современных математических книгах понять ничего нельзя. Но немецкий я выучил только в университете, а до того он был как бы криптограммой.

Было много замечательных книг серии «Матезис», в том числе популярные книжки Пуанкаре; в этой серии математика и физика соединились.

Моя первая (совместная с А. А. Кирилловым) математическая работа никогда не была опубликована, хотя мы (студенты-младшекурсники) и переписали её (по приказу поставившего нам задачу профессора Е. Б. Дынкина) семь раз. Дело в том, что переписав седьмую версию, я совершенно случайно открыл в своей библиотеке древний французский кожаный томик учебника Коши и наткнулся на практически ту же самую теорему, которую я только что доказал.

### **Аксиоматический метод**

Первая школьная неприятность была вызвана правилом умножения отрицательных чисел. Я тотчас начал расспрашивать отца, чем объясняется это странное правило. Мой отец, как верный ученик Эмми Нётер (и, следовательно, Гильберта и Дедекинда) стал объяснять одиннадцатилетнему сыну принципы аксиоматической науки: определение выбрано так, чтобы выполнялось тождество дистрибутивности  $a(b + c) = ab + ac$ . Аксиоматический метод требует соглашаться принять любую аксиому, в надежде на то, что следствия окажутся плодотворными (вероятно, их можно будет оценить к тридцати годам, когда можно

будет прочесть и оценить и Анну Каренину). Отец не сказал ни слова ни об ориентированной площади прямоугольника, ни о какой-либо иной нематематической интерпретации произведений и знаков.

*Алгебраическое* объяснение не смогло поколебать ни моей горячей любви к отцу, ни глубокого уважения к его науке. Но я навсегда возненавидел аксиоматический метод с его немотивированными определениями. Вероятно, случилось и то, что я к этому времени уже привык разговаривать с неалгебраистами (вроде Л. И. Мандельштама, И. Е. Тамма, П. С. Новикова, Е. Л. Фейнберга, М. А. Леонтовича, А. Г. Гурвича), относившимися к невежественному собеседнику с полным уважением и старавшимся действительно объяснить ему совершенно нетривиальные идеи и факты разных наук, будь то физика или биология, астрономия или радиолокация.

Отрицательные числа я понял годом позже, выводя «уравнение времени», учитывающее поправку в продолжительность дня, соответствующую времени года. Объяснить алгебраистам непригодность их аксиоматического метода для обучающихся невозможно.

Детей надо бы спрашивать, когда завтра будет прилив, если сегодня он был в три часа дня. Это посильно, но заставляет понимать отрицательные числа лучше, чем алгебраические рецепты. У кого-то из древних (возможно, у Геродота?) я прочёл, что приливы «всегда бывают в три и в девять часов». Не обязательно жить около океана, чтобы понять, как влияет на время прилива месячное вращение Луны. Настоящая математика здесь, а не в аксиомах.

### **Школьные годы**

Школа, в которой я учился, была обычной, но очень хорошей. Её окончили С. С. Аверинцев, В. П. Маслов и Ю. А. Рыжов. Однажды на выборах в РАН кандидатами были трое моих одноклассников, сейчас двое из них члены РАН. Даже учителя биологии, истории, географии, литературы подходили к своим предметам почти как к точным наукам, временно попавшим в трудное положение. Помню, что на «трудные» вопросы наивных школьников мудрые учителя отвечали: «А об этом вы спросите своих родителей, они сумеют

лучше меня объяснить, почему надо считать, что  $3 > 2$ ».

Родители кое-как объясняли, но я с ранних лет усвоил, что о некоторых вещах нельзя ни с кем говорить, например, не следует называть имена и отчества наших гостей и адреса в тех городах, удалённых от Москвы немного больше, чем на 100 км, куда я отсылал продуктовые посылки (то в Александров, то в Малоярославец, а то и в Киргизию или Сибирь). Среди гостей, впрочем, бывали то К. И. и Л. К. Чуковские, то И. Е. Тамм или М. А. Леонтович, да и А. Д. Сахаров был учеником моего отца и другом тётки.

В соседнем с нами доме жил (дай сейчас живёт) американский посол, и вдоль стены нашего сада ходил то охраняющий посла милиционер, то человек в штатском, очень любивший поболтать с детворой. Но я уже лет в десять знал, что нельзя рассказывать о госте бабушки, Розе Вениаминовне, которую привозила и увозила роскошная машина, и не потому, что от этого рассказа нам будет хуже, а из-за того, что он может повредить госте. Бабушка, посмеиваясь, читала очерки о своей революционной деятельности то в «Правде», то в «Известиях», авторы которых думали что она давно умерла, тем более, что все её сотрудники (кроме, разве, академика Немчинова и А. П. Юшкевича) были должным образом истреблены. Но она ещё при царе привыкла скрываться и, переезжая из города в город и меняя специальность и работу, сумела дожить до глубокой старости, хотя и считала, что встречи с ней для её сохранившихся высокопоставленных старых знакомых небезопасны.

В школе тоже не обо всём можно было говорить. Один из моих одноклассников после сессии ВАСХНИЛ 1948 года писал в анкете: «мать домохозяйка, отец домохозяин». Его отец, боевой офицер и один из крупнейших российских генетиков, едва ли не единственный отказался на лысенковской сессии покаяться, сохранил честь и был лишен работы (в конце жизни он был избран в РАН). После 1948 г. моя тётка сумела добыть работу по реферированию иностранной генетической литературы, которая оформлялась на её имя, но которую делал он и деньги за которую передавались ему.

После 1953 г: дышать стало легче, на Новый год меня даже

пустили в Кремль, и я до сих пор помню ярчайшее впечатление от Грановитой и Оружейной палат, о которых я знал меньше, чем о Соборах. Когда наступило «холодное лето», сопровождавшееся опасной амнистией бандитов, двери подъездов стали запирают с вечера на крюк, открыть который мог только кто-нибудь изнутри. Возвращаясь после 12 ночи, я обычно бросал камушки в окно, около которого на втором этаже спал мой младший брат (мне было 16 лет), и он, проснувшись, впускал меня. Но однажды я вернулся так поздно, что не сумел разбудить брата.

Через пару лет я уже поставил в саду палатку и ночевал в ней даже зимой (в спальном мешке). Но в описываемое время палатки ещё не было. В конце концов я решил использовать пожарную лестницу, чтобы залезть на крышу, потом спуститься с крыши по водосточной трубе метра на три до окна парадной мраморной лестницы, потом залезть через это окно (я умел его открывать) на лестницу, дальше всё просто.

Так я и сделал. Через 5 минут я уже засыпал в своей постели. Но тут раздался страшный стук и звон: в квартиру явилась милиция с понятыми, с топорами и объявили, что, охраняя посла, милиционер заметил бандита, залезшего по крыше в наш дом, и что теперь надо проверить, не у нас ли он. К счастью, все члены моего семейства, быстро найдя меня, сообразили, что у нас в квартире «все всегда были на месте», так что применять топоры не пришлось.

Я думаю, искавшие меня были не какие-нибудь злодеи, а просто добросовестные работники. Человек в штатском, бродивший всегда вдоль стены нашего сада, тоже, кажется, не причинил ни детям, с которыми он любил болтать, ни их родителям серьёзного зла. Жаль только, что в конце концов всех жителей нашего дома выселили на разные окраины Москвы (меня в Черёмушки, откуда можно было прямо на лыжах бежать через Ясенево в Дубровицы или Красную Пахру, тогда как мой отец ещё бегал на лыжах из нашего арбатского дома на Воробьёвы горы). В доме же поселили африканское посольство. Так что теперь наш мирный пейзаж проще видеть в Третьяковке, на картине Поленова «Московский дворик» (удивительно, как мало изменились места, разве только исчезли каретные и дровяные сараи, где я все послевоенные годы пилил и колол дрова для наших голландских печек). В сад теперь

не пройдёшь, а ведь он занимает почти весь квартал от нашего Спасопесковского переулка до «улицы Вахтангова». Исчезли цветные подушки, заменявшие выбитые бомбежками стёкла в наших окнах; не видны больше наши огороды и противоздушные щели, вырытые нами в саду под нашими окнами; но столетние дубы и липы все ещё стоят там.

### **Цвет меридиана**

Вся школа Мандельштама подвергалась суровым нападкам и обвинениям в идеализме. Во время одной из дискуссий Тамм оправдывал идеализацию как необходимый метод работы естествоиспытателя: «Бесмысленно спрашивать о цвете меридиана; это воображаемая линия, не имеющая ни цвета, ни вкуса, ни запаха, но очень полезная и для географии, и для геодезии, и для астрономии!» Возражавший Тамму борец с идеализмом сказал на это: «Не знаю, какого цвета Ваш меридиан, но *мой меридиан красный*.

К счастью, попытки философов уничтожить в СССР, вслед за генетикой, большую часть теоретической физики (прежде всего теорию относительности и квантовую механику, но заодно и математику с её "нематериалистическими" бесконечностями и пределами) не увенчались успехом. Согласно опубликованным сейчас рассказам участников этих событий 1949 г., спас науку в нашей стране, прежде всего, Курчатов, сообщивший и Берии, и Сталину, что уничтожить и квантовую механику, и теорию относительности, и теорию пределов в России можно, и это даже технически проще, чем уже совершенное уничтожение генетики, но только атомные бомбы тогда уничтожители пусть делают без этих наук, сами (а это-то, как раз, невозможно). И уничтожающее идеализм заседание уже подготовленного ЦК КПСС "Всесоюзного Совещания", намеченное на 21 марта 1949 г., было отменено (о подготовке этого Совещания можно прочитать в книге: Сонин А. С. Физический идеализм. — М.: Физматлит, 1994).

### **Трудно сохранить тайну**

Одним из самых ярких лиц в компании моих друзей студенческих и аспирантских лет был Миша (Михаил Львович)



Лидов. Однажды мы даже чуть было не утонули вдвоём с ним в первомайском походе, перевернувшись на байдарке на Боровицком пороге на реке Мсте, поднявшейся в то половодье метров на десять выше меженного уровня (в тот день там же, уже по-настоящему, утонули трое, составлявшие команду шедшей за нами байдарки, слишком спешившие вернуться в свой Ленинград к завтрашнему рабочему дню).

Миша начинал свой трудовой путь рабочим сцены МХАТ, потом ушёл на фронт добровольцем, и был там авиационным техником, а уже после войны поступил на мехмат МГУ и затем работал в ИПМ (Институте прикладной математики им. М. В. Келдыша). Наши споры с ним переходили от Лапласа и Пуанкаре к театру и Шекспиру.

Помню, например, наши дискуссии о переводах шекспировских сонетов. Мне больше всего нравились (и продолжают нравиться) переводы Маршака (о которых хорошо знающие русский англичане говорили мне, что эти переводы, как и его переводы Бернса, лучше оригиналов, язык которых для современного английского уха уже иногда труден). Запомнились строки, оценивающие другой перевод:

*Всё изменяется под нашим зодиаком,  
но Пастернак остался Пастернаком.*

Чтобы понять эти строки (приписываемые Архангельскому, хотя в его «Парнасе дыбом» я их не нашёл), нужно знать историю петербургского экзамена по астрономии для молодых моряков, включавшего узнавание созвездий. Неудача одного воспитанника, перепутавшего на экзамене зодиакальные созвездия, была воспета в известном студенческом стихотворении:

*Всё изменяется под нашим зодиаком:  
Стал Козерогом Лев, а Дева стала Раком!*

Мне кажется, детей надо обучать созвездиям раньше, чем грамоте и счёту (оно и легче), наряду с обучением отличию берёзы от дуба. В юности я договорился с любимой, обучив её звёздам, что мы всегда будем думать друг о друге, глядя на звезду Гемму (альфу Северной Короны). Надеюсь, что с тех пор она обучила находить Гемму своих троих детей, теперь уже взрослых. Другая замечательная история, связанная с описанным выше

астрономическим экзаменом и с трудностью сохранения тайны, описана замечательным математиком и кораблестроителем Алексеем Николаевичем Крыловым в его поразительно интересной книге «Мои воспоминания». Он рассказывает, что студенты-моряки на несколько секунд раздобыли литографский камень, с которого только что были напечатаны задачи завтрашнего экзамена, после чего печатнику предстояло смыть камень на глазах у профессора. Студенты успели сделать себе оттиск, посадив на камень наиболее толстого студента. И весь курс быстро списывал отпечаток этих задач с задницы этого студента, ставшего впоследствии как раз тем самым министром, который на суде обвинял капитана нового военного корабля в разглашении сведений об артиллерийских испытаниях. Рассказ Крылова составляет часть произнесенной им на суде защитительной речи в пользу этого капитана. Крылов начал с того, что подобные тайны никогда нельзя сохранить дольше месяца, а в военное время (дело было как раз в начале Первой мировой войны) дольше недели.

### Храм науки

Когда я начал преподавать, пришёл очень способный первокурсник, я дал ему задачу, и он исчез. Через несколько недель звонит: «Владимир Игоревич, это я, Аскольд. Вы, наверное, волнуетесь?» «Да!» «Это зря: я в больнице, меня туда доставили с Белорусского: у меня немного сломаны ноги!» «Как это? Вы под поезд попали?» «Нет, до поезда было еще метров 50. Я просто упал с платформы на пути.» «Вы что, выпили?» «Нет, просто был час пик и на платформе было слишком много народу, а я ехал на велосипеде ...».

Встретил я однажды в лифте Университета пожилого профессора X. «Здравствуйте! сказал он. У нас умер заведующий кафедрой Y, и я хочу провести на его место в профессора доцента Z, он уже чуть не 20 лет как доктор. Тогда, добавил X, я и M смогу помочь! А то все хотят провести N, такого пустого и нехорошего». «Желаю успеха! ответил я. Я очень ценю Z». И поехал по своим делам дальше.

Вечером встречаю друга с той же кафедры, что X, и он мне говорит: «Ты смотри, каков X! Мы думали он будет за Z, а он

предложил поделить профессорское место между М и N, а Z и не назвал. Но тут проснулся О и говорит: "Что у нас, совсем совести нет? Очередь за Z"; и Z провели (один голос против)». Говорят, в записной книжке L было чёрным по белому написано: «Никогда не иметь дела с сукой А и с гнидой Х».

«А всегда был везунчик, говорил мне В. Например, велели нам обоим вступать в партию, время было страшное, подали заявления. Но он был везучее: к моменту приёма у него уже был адюльтер. А у меня ещё не было. Вот всю жизнь и мучаюсь в партии ...».

Другой рассказ В: «Я на семинаре всегда кратко представляю докладчика. Раз С говорит: "Мне только что дали N-скую премию, упомяни в представлении". Я упомянул, а он начал свой доклад словами: "Ну, зачем и говорить об этой мелочи"». Я. Б. Зельдович написал замечательный учебник «Математика для начинающих физиков и инженеров». Математики пришли в ярость и устроили битвы из-за его (якобы) нестрогости и ошибочности. В конце концов главный критик Понтрягин написал свой (скучнейший) учебник математического анализа для начинающих. В предисловии он заявил, что некоторые физики считают, что можно грамотно пользоваться анализом, не восходя до исчерпывающего исследования его обоснований. И добавил: «Я с ними согласен».

Зельдович был обижен: «В таких случаях цитируют оппонента, говорил он. А так эта цитата – плагиат».

В учебнике Зельдовича производная определялась как «отношение приращения функции к приращению аргумента, в предположении, что последнее достаточно мало». Никаких пределов он здесь рассматривать не хотел, так как, по его словам, «приращения, меньшие  $10^{-10}$ , всё равно нет смысла рассматривать: ведь структура и пространства, и времени в столь тесной близости вовсе не описывается математическим континуумом». «Нас всегда интересует именно отношение конечных приращений, а производные математиков это просто приближённые математические формулы для вычисления отношений этих конечных приращений».

М. Л. Лидов как-то объяснил мне, что математические теоремы, вроде теоремы единственности в теории дифференциальных

уравнений, противоречат физической реальности. Например, две интегральные кривые уравнения  $x' = -x$  (с разными начальными условиями  $x(0) = 0$  и  $x(0) = 1$ ) практически пересекаются при  $x = 10$  или  $20$ . Из-за этого корабль не может плавно пристать к пристани, управляя двигателем: либо произойдёт удар, либо потребуются бесконечное время. Вот почему последний этап швартовки матрос завершает вручную, набросив причальный трос на кнехт пристани. По этой же причине при посадке космических кораблей на Луну и на Марс они должны попрыгать на упруго демпфирующих ударах ног, вот из-за чего Лидов и знал все эти тонкости с теоремой единственности.

В храме Христа Спасителя было четыре агатовых колонны. При взрыве их спасли, перевезли в Донской монастырь, а потом в Университет. Когда Храм стали восстанавливать, их стали искать, но нигде нет. В конце концов один корреспондент стал фотографировать все колонны МГУ и вечером уборщица указала ему, что искомые четыре – в кабинете ректора. Там они и остались: ведь Университет это Храм Науки.

## Госэкзамен по основам марксизма

Один раз довелось мне принимать у оканчивающих мехмат МГУ студентов дипломный экзамен по основам марксизма-ленинизма. Накануне встретила меня в университете начальница партийной организации кафедры и попросила защищать наших студентов на этом экзамене: обычно это доверяли кому-либо из членов партии, но на этот раз все разъехались уже на летние каникулы (дело было в конце июня) и пришлось заменить их мною.

Вот запомнившиеся мне примеры (всего студентов было человек тридцать). Экзамен длился часов шесть. Каждого студента опрашивали двое: сначала он тянул билет, потом готовился, отвечал на вопрос, билета и, самое главное, на дополнительные вопросы экзаменаторов.

Помню блестящего чёрного студента: он блеснул как хорошо начищенный сапог и знал наизусть ответы на все вопросы. Я хотел после всех ответов поставить ему «отлично», но мой напарник-марксист не согласился на большее, чем "удовлетворительно". После длительного спора он объяснил мне: «А Вы знаете, из какой он страны?» «Нет, не знаю». «Так вот, из Республики Чад. Это значит, что, вернувшись домой, он обвинит нас всех в фашизме. Как можно ставить отметку выше, чем "удовлетворительно"?»

Довод на меня не подействовал, но в конце концов марксист меня убедил согласиться с «удовлетворительно»; он доказал мне, что ни на одном предшествовавшем математическом экзамене этот студент не получал отметки выше "удовлетворительно": он ничего ни в чём не понимал, а всё только вызубривал, как в математике, так и в марксизме.

Затем отвечала девушка-татарка. В билете ей досталось «атеистическое воспитание молодежи». Она всё, что полагалось, произнесла, процитировав даже и Яна Амоса Коменского, и Крупскую. Но марксист был явно недоволен и спросил: «Ну, а Вы лично, Вы в бога-то верите?» Студентка была умная, она задумалась ровно на полсекунды и ответила: «Я комсомолка, а комсомольцы...». «Это правильно Вы говорите, сказал преподаватель. Но я не об уставе комсомола спрашивал, а о Вашем личном мнении.

Ну хорошо, вот у нас в Москве, есть ли мечеть?» Девушка не растерялась и тут: «Должна быть». «И это верно. А какой у неё адрес?» «Не знаю». Когда мы отпустили студентку, преподаватель стал ругать её за лицемерие; он был уверен, что она верующая мусульманка и настаивал на отметке «удовлетворительно». Всё же мне удалось отспорить ей отметку «хорошо». Он доказал мне, что именно такие у неё отметки в зачётной книжке по математике, так что больше ей и не нужно.

Наконец, дошла очередь до отличного студента, работу которого по математике я знал. Этому требовалась отличная отметка и на экзамене по марксизму, чтобы поступить в аспирантуру. У него спросили: «Окончательно ли у нас построен социализм?» Он ответил, что «согласно решению такого-то съезда партии, основы социализма построены полностью». Тогда спросили: «Ну, и навсегда?» Он ответил, что «согласно постановлению пленума от такого-то месяца, основы социализма построены окончательно. Тогда последовал неожиданный вопрос: «Кто вел упражнения по марксизму в Вашей группе?» «Иванов».

Когда студент ушёл, преподаватель стал требовать, чтобы мы оценили его знания как «удовлетворительные». Я стал сильно протестовать, и тогда он объяснил мне свою точку зрения. «Этот Иванов работает у нас на кафедре, но у него по этим вопросам совершенно неверные мнения и вот он внушает их студентам!» Но всё же в этом случае я победил, добился оценки «отлично», студента приняли в аспирантуру и он защитил впоследствии замечательную диссертацию.

### **Благие намерения**

Многим читателям «Евгения Онегина» следовало бы разъяснять смысл ряда встречаемых там выражений, вроде «что ум, любя простор, теснит». Это слова Кикина, воспитателя царевича Алексея, сказавшего Петру перед своей казнью на Красной площади: «Моему уму с тобой тесно».

Кикин считался умнейшим человеком России, и Пётр начал казнь со слов: «Вот, смотри, до чего тебя твой ум довёл-то!» Когда же Кикин, обругав Петра, ещё и плюнул ему в лицо, Пётр отменил

предполагавшееся четвертование Кикина, заменив его немедленным раздиранием стальной «медвежьей лапой».

Рядом в то же время сажали на кол офицера, охранявшего постриженную в Покровском монастыре в Суздале Евдокию, первую жену Петра (родившую ребёнка, видимо, от этого сторожа).

*Я знаю, дам хотя бы заставить  
Читать по-русски — право, страх!  
Возможно ли их себе представить  
С Благонамеренным в руках!*

Александр Сергеевич, посылая эту строфу Вяземскому, забыл, верно, их обсуждение своего здоровья, о котором он писал: «Если бы не состояние моего Благонамеренного, о коем можно сказать то же, что и о его печатном тёзке: пускай намеренье благое, да исполнение плохое».

«Печатный тёзка» был слабеньким журнальным изданием, автор которого публично извинял себя тем, что «на праздниках гулял». Вяземский, однако, понял, вспомнил и закипел.

Но А. С. не боялся комментировать строки

*Над их бровями надпись ада —  
Оставь надежду навсегда*

непристойным замечанием: «Скромный автор перевёл лишь половину славного стиха». Вторая половина стиха Данте:

*Всяк сюда входящий*

Летом 2001 г. на берегу реки Дубны восьмидесятилетний местный рыболов жаловался мне на нынешнюю молодёжь: сорокалетние балбесы, прогуливая работу, сидят у телевизора, не идут ни рыбу ловить, ни напиваться. «В наше время во-первых, в тюрьму посадили бы за такие прогулы, а во-вторых, кто прогуливал, тот и напивался, и в реку лез. Вот мой друг Васька так спьяну и утонул. И другие тонули. Где мы сейчас сидим — знаешь сколько сомов было! Они любят покойников! А теперь из-за этого телевизора никто не тонет, вот сомов и нет. Даже ваши школьники (в Дубне я читал лекции собранным со всей России школьникам и студентам) не имеют права купаться без учителей, вот и не тонут, откуда же теперь сомам взяться!»

Имя деревни Мневники — от рыбымень (налим): жители

поставляли налимов к царскому столу. Ловить их другим было запрещено (километров даже на десять вверх по Москве-реке, не то до Павшина, не то даже до Архангельского).

Нумерацию домов на улицах Парижа (а оттуда разошлось и повсюду) изобрёл наполеоновский генерал Шодерло де Лакло: слева растут нечётные, нечто даже *p*-адическое в идее (рост – вдоль течения Сены или в гору от неё).

### **Сахар Лапласа**

История Ф. Араго: в юности попал в плен к пиратам, потом выкуплен (каким-то англичанином в Египте?), вернувшись, стал активнейшим учёным, работал с Ампером и в оптике. Его выдвинули в Академию наук. Кандидат (до сих пор) должен посетить всех голосующих и уговаривать голосовать за себя. Пришлось зайти к старому уже Лапласу. Тот был любезен и расспрашивал о науке, молодая же жена ходила кругом и всё не решалась вмешаться. В конце концов она собралась с силами и спросила мужа: «Не доверите ли Вы мне ключи от сахарницы? Я хочу угостить гостя чаем».

Французские коллеги объяснили мне, что в те времена сахарницы обычно запирались ключами от слуг, так как сахар был очень дорогим заморским лакомством. Воспоминания Араго это одна из самых интересных книг об истории науки.

### **Уравнение теплопроводности**

Провалился под лёд я без лыж в первые дни мая, переходя по льду входящее теперь в черту Москвы стометровое озеро «Миру — мир». Началось с того, что лёд подо мной стал слегка прогибаться, и под кедами показалась вода. Вскоре я понял, что форма льда – гауссовская колоколообразная (перевернутая) кривая. Ещё через минуту стало ясно, что я наблюдаю фундаментальное решение уравнения теплопроводности (в обратном времени). И, действительно, слегка не дойдя до дельта-функции, лёд провалился, и я оказался в проруби диаметром в полметра, метрах в тридцати от берега.

Хотя толщина льда, почти уже белого от многочисленных



заполненных водой трещинок, была 5 – 10 сантиметров, вылезти на него оказалось очень трудно. Этот лёд, который минуту назад удерживал меня вместе с гауссовой лужей метра четыре в диаметре и полметра глубиной в центре, теперь немедленно ломался, когда я клал руку на край проруби. В конце концов прорубь расширилась и позволила мне разогнаться вплавь и выброситься на ещё нетронутый лёд, по которому я и двигался дальше ползком, пока не перешёл озеро до конца.

Связь прогиба льда с уравнением теплопроводности меня уже тогда не удивила, так как я читал воспоминания фон Кармана, который ответил в Москве какому-то специалисту на вопрос о поведении решений одного уравнения с частными производными: «Это Вы хотите танки через Байкал перегонять?» Фон Карман напугал тогда принимавших его лиц своим мгновенным предсказанием серии дождей во Внукове: «Дело в том, что над нами сейчас проходит дорожка Кармана».

В конце войны Карману было поручено перевезти в США немецких специалистов по ракетам, не допустив их захвата русскими. Он, действительно, привёз фон Брауна (и тем основал американскую ракетную промышленность), в то время как попавшие в Россию представители Пенемюнде (где делались Фау-2) были поселены на острове Городомля посреди Селигера и всегда сожалели о том, что их знания и умения так и не были использованы по-настоящему. (Карман воспитал также китайского помощника фон Брауна в США, который впоследствии вернулся в Китай и создал там ракеты.) Отбирая специалистов, Карман двигался сразу же за передовыми отрядами наступающей американской армии, и в Гёттингене встретился со своим старым учителем, Прандтлем (который и для Колмогорова значил в гидродинамике более, чем кто-либо). Прандтль сообщил, что он и не подозревал об ужасных преступлениях нацизма, о концлагерях, фотографии которых стали тогда публиковаться, и т. п. «С Вашим умом это можно было бы *вычислить*, господин учитель», ответил Карман.

### **Кто кого**

По французскому радио я слышал, что во время войны

Швейцария передавала немецким властям на границе всех тех, кто пытался через Швейцарию бежать от фашизма. Впрочем, сами французы отправили в лагеря смерти, по обвинению в неарийском происхождении больше парижан, чем немцы (говорят, в восемь раз больше!). Еврею нельзя было ездить в метро, входить в кино или на стадион, и полагалось носить на одежде жёлтую звезду. Сосед, желающий овладеть его квартирой, мог часами выслеживать в жаркий день, не снимет ли неариец куртку со звездой, чтобы тотчас выдать его, и люди, разбогатевшие на еврейском имуществе, процветают до сих пор.

Недавно в Париже при выборах в члены Академии наук одного кандидата публично упрекали в том, что он «француз только по паспорту». Впрочем, один академик недавно убеждал меня, что Гитлера разбил де Голль, а Россия участвовала во Второй мировой войне на стороне Гитлера (имелась в виду Польская кампания и пакт Молотова-Риббентропа, как я понимаю). Но уверенность в победе де Голля над Гитлером воспитывается в школе.

В немецкой школе версия другая. Версальский договор после Первой мировой войны разорил Германию. Гитлер спас её экономику, но допустил ошибки во внешней политике, поэтому Германия и проиграла Вторую мировую войну. Больше школьники о нацизме ничего не узнают. Россия здесь не упоминается. Но по телевизору показывали документальный фильм, где украинцы встречают цветами немецкие войска, занимающие их города (в показанных в этом фильме русских и белорусских городах всё было иначе).

### **Лавуазье и французская математика времён революции**

Легенды характеризуют своего героя иначе, чем истинные происшествия: легенда, что Х – людоед, больше говорит о его человеческих качествах, чем о его диете. Легенда о Лавуазье, изложенная ниже, передается в Академии Наук Франции из уст в уста, так я её и узнал, написанной её не видел (хотя воспоминания революционного палача и были изданы Бальзаком).

Людовик XVI для сбора налогов с приезжающих в Париж продавцов использовал специальный колхоз, «генеральную ферму»: сотня фермеров (откупщиков) построив вокруг Парижа

стену с воротами, взимала налог с каждой ввозимой курицы, причем определённый процент с этого налога шёл в их пользу. Понятно, что революция постановила гильотинировать их всех, а когда кто-то пытался спасти откупщика Лавуазье, учитывая пользу от его научных занятий, то реакция была однозначной: «республике не нужны учёные» (довод универсальный и вечный).

Легенда рассказывает, что палач разговаривал с Лавуазье ещё до казни, и что Лавуазье обратился к нему с просьбой. «Я — учёный, и привык, что каждый эксперимент должен приносить пользу науке. Мы вместе будем участвовать в эксперименте гильотинирования. Было бы жаль, если бы от этого эксперимента науке не было пользы. Чтобы извлечь пользу для науки, я просил бы проверить, испытывает ли отрубленная голова что-либо ещё хотя бы несколько секунд. Вопрос этот давно уже меня занимает. Чтобы это выяснить, ты, когда будешь показывать народу мою отрубленную голову, посмотри сперва сам мне в глаза. Если в это время я ещё буду что-нибудь чувствовать, то я тебе подмигну правым глазом. Только не перепутай — моим правым глазом, левый не в счёт!»

Палач любезно согласился, заметив, однако: «Научного толку от этого эксперимента всё равно не будет. Ведь если бы эти головы ничего не чувствовали, то мне не приходилось бы каждую неделю менять корзину, у которой они все обкусывают края!»

Представление революционеров об учёных, в особенности о математиках, обычно бывает неправильным. Марат сформулировал его так: «Лучшие среди математиков это Лаплас, Монж и Кузен: это своего рода автоматы, привыкшие следовать некоторым формулам и употреблять их вслепую...» («Les Charlatans Modernes», 1791). Позже Наполеон, сперва поручивший Лапласу министерство внутренних дел, удалил его за «попытки внести в управление дух бесконечно малых» (я понимаю это так, что Лаплас хотел, чтобы счета сходились до копейки).

Впрочем, Бальзак описывал «квадрат длинный и очень узкий» (в «Un menade de garson»), Дюма-сын описывал «дома, сделанные наполовину из дерева, наполовину из камня и наполовину из штукатурки», а американский президент Тафт в 1912 г. считал, что

США подчинит себе «всё полушарие, охваченное равносторонним сферическим треугольником с вершинами на Северном и Южном полюсах и на Панамском канале».

Набоков в комментариях к «Евгению Онегину» поясняет пушкинскую строку «в гранёный ствол уходят пули» словами «сечение ствола пистолета представляет собой многогранник», хоть и кончал гимназию в России. Паскаль удивлялся людям, «которые так и не могли взять в толк, что если от нуля отнять число, то в результате получится ноль». Он также утверждал, что, «поскольку числам нет конца, существует число, выражающее бесконечность».

Описывая французскую математику около 1820 г., Абель уже находил, что здесь каждый хочет учить, но никто не хочет учиться. Они потеряли главный труд этого «жителя Норвегии, составляющей часть Сибири», доказательство неразрешимости в радикалах общего уравнения степени пять.

### **Королева Элеонора, Розамунда и теория лабиринтов**

Элеонора Аквитанская — одна из самых замечательных королев (то Франции, то Англии). Вначале она была герцогиней Аквитании, очень культурной и образованной, интересовавшейся музыкой и поэзией. Выйдя в возрасте 15 лет замуж за французского короля Людовика VII (1137 г.), она принесла ему в приданое огромную часть Франции: всё на юг от Луары, вплоть до Пиренеев и Средиземного моря, включая Пуатье, Бордо и Тулузу. Владения короля были неизмеримо меньше, вероятно, меньше Московской области; это был почти только лишь Иль-де-Франс. В то время Бургундия, Нормандия и Бретань во Францию не входили.

Родив королю двух дочек, Элеонора совершенно в нём разочаровалась: король не любил воевать и не заботился даже о защите Гроба Господня от мусульман. Элеонора заявила королю, что надо организовать крестовый поход, и что она сама будет командовать отрядом амазонок, который тотчас и организовала. Королю пришлось отправиться с ней во второй крестовый поход — по суше, через Константинополь и Антиохию. В Антиохии Элеонора встретила своего дядю, правителя Антиохии, и хотела было остаться с ним, но король из ревности не допустил этого, так

что любовь к дяде оказалась недолгой. На дальнейшем пути к Иерусалиму тактические ошибки Элеоноры стоили жизни десятку тысяч французских рыцарей, которым король поручил охранять жизнь отряда амазонок, в каком бы неудобном для обороны месте они ни остановились ночевать.

Из Иерусалима, побив некоторое число мусульман, Элеонора с мужем вернулись в Европу на корабле, заехав сперва в Рим (1149 г.) побеседовать с Папой Римским. У него королева попросила развести её с мужем, ссылаясь на их слишком близкое родство, якобы препятствующее рождению сыновей, необходимых в качестве наследников французского престола. В конце концов, уже разведённые, они вернулись в Париж (причем благородный король отдал Элеоноре приданое). В это время в Париж приехал также первый английский король семейства Плантагенетов, Джефри. Он был герцогом Нормандии и в качестве такового подчинился французскому королю, платил налоги. Элеонора сразу заметила, что, в отличие от Людовика VII, не желавшего воевать, Джефри — настоящий мужчина. Но так как доказывать это пришлось в замке французского короля, у дверей комнаты Джефри поставил сторожем своего шестнадцатилетнего сына Генриха. Он тоже понравился Элеоноре. Через пару лет она вышла за него замуж, принеся в приданое свою Аквитанию, а так как Джефри вскоре умер, то Элеонора стала английской королевой (1154 г.), женой молодого короля Генриха II. Со временем она родила ему восемь детей, в том числе пятерых сыновей, трое из которых были впоследствии королями, причём двое очень знамениты: это Ричард Львиное Сердце и Иоанн Безземельный, младший сын, которому вначале при разделе многочисленных земель родителей ничего не досталось по малолетству, но который получил всё впоследствии, по смерти братьев.

Но супружеская жизнь Элеоноры с Генрихом была не слишком счастливой: он посадил её в тюрьму на 16 лет за то, что она организовала бунт сыновей против короля и фактически выгнала его в его французские владения, где он и умер в ходе феодальных войн. Элеонора прожила лет 80 и пережила и мужа, и любимого сына Ричарда; она похоронена (1204 г.) во французском аббатстве Фонтенбло, надгробие изображает её, в отличие от всех других

французских королей, читающей книгу, что было её любимым занятием.

В сущности, Элеонора послужила впоследствии причиной Столетней войны, так как наследники её французского и английского мужей не могли мирным путем решить, кому надлежит теперь владеть её приданым. Разногласия Элеоноры с Генрихом были многообразны: например, она была на стороне Кентерберийского архиепископа, спорившего с королём по теоретическим теологическим вопросам и убитого придворными (причём король объяснял Папе Римскому, что не приказывал убивать архиепископа). Другая история связана с математикой (теорией лабиринтов) и отражена даже в книге Сергея Боброва «Волшебный дворог» (рукопись которой я в десятилетнем возрасте многократно носил из нашего дома в Спасопесковском переулке Боброву на угол Арбата и улицы Вахтангова, так как мой отец был математическим редактором этого шедевра популярной математики с задачами и дискуссиями, в котором описаны приключения десятилетнего мальчика, попавшего в таинственный математический мир).

Король Генрих построил в Вудстоке, недалеко от Оксфорда, сад, деревья и дорожки которого образовывали лабиринт, а в центре сада был подземный дворец с тысячей дверей внутри, также в виде лабиринта. Во дворце жила любовница короля, Розамунда Клиффорд, она вышивала шёлком целыми днями, ожидая короля, и считала себя его единственной любовью.

Отправляясь в свои французские владения, король однажды зашёл к ней попрощаться, но шёлковые нитки зацепились за звезду его шпоры и, когда он вернулся домой к королеве, она их увидела и решила по отъезде короля отыскать в саду Вудстока, не осталось ли ниток на кустах. Слуга, которому король поручил убивать всех, кто зашёл бы в лабиринт, не решился убить королеву, и она в конце концов нашла Розамунду (1177 г.).

Дальнейшее рассказывается по-разному в различных английских изложениях этой истории (а их писали в течение нескольких столетий; между прочим, публиковались эти изложения под названием «Легенды о короле Артуре и рыцарях круглого стола»). Назвать прямо имена короля и королевы было нельзя, так что их

зашифровали под именами Артура и Джиневры, каковые жили на полтысячи лет раньше, да ещё скорее в Бретани, чем в Британии).

По одной из версий ревнивая королева отравила Розамунду, как Сократа, по другой – принесла ей свой меч и предложила покончить с собой, по третьей – сварила её в кипятке находившейся во дворце бани (подобно тому, как некогда Дедал\* сварил Миноса, отыскавшего его в Сицилии), по четвёртой – приставила к её грудям двух жаб, которые и выпили всю кровь Розамунды, так что король, вернувшись к ней, обнаружил тело весом килограмм двадцать. Он похоронил Розамунду в монастыре (в то время в Англии они ещё были) Годстов, причём на могильной пирамиде можно и сейчас прочесть «*Nic jacet in tumba Rosa mundi, non tunda*». Насколько я разобрал эту латынь, «здесь покоится не роза небесная, а роза земная», но «небесная» может означать также «благоухающая», «прекрасная», «космическая» и даже «дьявольская», а «земная» — «светская», «вонючая», «уродливая».

Недавно один крупный деятель из РАН объяснил мне, что все академики делятся на две категории: завлабы и директора. Завлабы вознаграждаются судьбой крупными научными открытиями, в то время как директорам достаются от судьбы иные поощрения. В этот раз мы с ним не стали обсуждать, к какой категории принадлежит он сам, чьи научные достижения неоспоримо замечательны. Но я подумал, что, если верна моя гипотеза о том, что надпись на могиле Розамунды сочинена Элеонорой, то, выходит, Элеонора уже в XII веке различала эти две категории специалистов (если и не для всех представленных в РАН областей науки, то хотя бы для вышивания шелками).

В «Волшебном двуроге» теория лабиринтов завершается странной «песней тетушки Розамунды», которой я, конечно, не понимал; но теперь думаю, что Бобров, акмеист, поэт и друг не то Есенина, не то Маяковского, наверное, знал эту историю. В современном английском кино Элеонору Аквитанскую показывают в фильме «Лев зимой».

### **Площадь Вогезов**

Недалеко от мэрии (Отель-Виль) улица предместья Сент-Ангуан

соединяется с улицей Риволи, образуя треугольную площадь. На этом месте Парижа в старое время находился стадион для рыцарских турниров, а из окон окрестных домов на эти турниры смотрели дамы, вплоть до королев. Один из турниров очень знаменит и сыграл большую роль в истории Франции. Король Генрих II, сын Франциска I и муж Катерины Медичи, очень любил охоту, турниры и всякие телесные упражнения. В юном возрасте его обучила любви любовница отца Диана де Пуатье, тридцатилетняя вдова (а ему было пятнадцать). Родители решили женить принца и привезли ему из Италии пятнадцатилетнюю Катерину Медичи (с её ядами, алхимиками и т. д.). Но Генрих II не желал иметь с ней дела, так как любил Диану. В конце концов Диана загнала Генриха II в постель Катерины, убедив его в необходимости произвести наследников.

Впоследствии Генрих II достраивал Лувр и оставил на выстроенных им стенах вензель (HDC, что означает: Генрих, Диана, Катерина), который там виден и сейчас. Во время описываемого турнира (1559 г.) Генрих сражался со своим другом и напарником, который ударил его так сильно, что отломал конец своей пики с набалдашником. Острый конец оставшейся части проник в глазницу короля, и он вскоре умер в страшных мучениях.

Французские обычаи требуют ставить на могиле короля (в соборе Базилика Сен-Дени) мраморное надгробие в виде ложа, на котором лежат нагие король и королева в той позе, в какой их застала смерть. Поэтому с короля была снята маска. Когда лет через тридцать королеве Катерине Медичи пришла пора умирать, она заказала надгробие лучшему скульптору, и тот сделал его с замечательным реализмом: умирающий в страшных муках молодой король соседствует со старухой.

Недовольная королева заказала новое надгробие скульптору-лакировщику, и он сделал обоих супругов примерно ровесниками. После смерти королевы встал вопрос, какое же надгробие использовать. По-видимому, решал его зять, Генрих IV, бывший тогда королём. Во всяком случае, сейчас оба надгробия, и реалистическое, и льстивое, стоят рядом.

После турнира Катерина не захотела больше жить во дворце Турнель, расположенном недалеко от места турнира, и даже



сломала этот дворец, переехав в Лувр (который только с тех пор и стал местом жительства королей). Позже обломки дворца убрали, и образовался пустырь. Генрих IV решил украсить этот пустырь, построив впервые в Париже площадь общей архитектуры по единому проекту. На противоположных концах этой квадратной площади стоят дома короля и королевы, дюжина соединяющих их меньших особняков досталась знати (злые языки уверяли, что Генрих предназначил каждый из них одной из своих любимых).

Поскольку других площадей в Париже не было, эта получила название «Площадь». Но позже Людовик XIV построил ещё круглую «Площадь побед» с памятником себе самому. Тогда квадратную площадь переименовали в «Королевскую площадь». Революция заменила это название на «Площадь независимости», а потом в период разрухи решили дать ей имя того из департаментов, который первым заплатит налоги. Вот почему она теперь называется «Площадь Вогезов». Посредине этой площади стоит памятник Людовику XIII, сыну Генриха IV. Из надписи на памятнике следует, что молодой человек поставил себе памятник сам ещё при жизни. Его лицо удивительно напоминает лицо Петра на памятнике Фальконе в Петербурге.

В 1533 г. в Париже заживо сожгли книгоиздателя за то, что он опубликовал «Зеркало грешной души», книгу, написанную сестрой короля Франциска I, Маргаритой Наваррской. На лучшем портрете жены Генриха IV, королевы Марго, она смотрится в зеркало, подобно героине этой книги. Тогда же впервые сожгли здесь и женщину-еретичку, школьную учительницу Марию Ла Катель, за то, что она читала детям Евангелие *по-французски* Варфоломеевская ночь (1572 г.) никого уже не удивила.

### **Чампл Зи**

В 1965 г., вероятно в марте, я жил в Ситэ Университэр в Париже и однажды вечером, выйдя на Бульвар Периферик, встретил длиннющий американский лимузин. Водитель, *corn-fed American*, спросил меня (я думал, что по-немецки): «Чампл Зи?» После нескольких попыток объяснить мне, что ему нужно, он обратился внутрь лимузина, где сидели одетые в цветастые и почти детские платья с фестончиками американские старушки, за советом. После ряда консультаций вопрос принял форму «Чамп Элайзи?» —

вследствие чего я начал их понимать и вскоре объяснил, как им проехать на Елисейские поля.

Лет через двадцать пять моя жена учила французский после английского. Пытаясь исправить её американский акцент, я рассказал ей историю «Чампл Зи». На следующий день на уроке у них появился рассказ о канадском семействе, поселившемся в отеле на авеню де Шанз Элизэ (авеню Енисейских полей). Когда жене пришлось читать на уроке вслух эту историю и она дошла до адреса отеля, то не смогла удержаться и прочла (за канадца) «авеню де Чамп Элайзи» к большому восторгу преподавателя.

Как это ни странно, совершенно такая же история произошла и со мной самим на Учёном Совете Математического института имени В. А. Стеклова. В течение многих лет председателем этого Совета был Иван Матвеевич Виноградов, теоретико-числовик, который никогда не мог правильно прочитать название диссертации, если там встречалось трудное слово «дифференциальные уравнения». Он всегда читал «диофант овы» вместо «дифференциальные», теоретико-числовику так проще. (Перепутав вдобавок фамилию оппонента, Виноградов оправдывал себя словами: «Ну, ничего, не велика птица».)

Прошло много лет, Виноградов умер, и вот однажды объявлять название диссертации пришлось мне. Конечно, я сразу вспомнил об ошибках Виноградова. Но диссертация была «об одном свойстве некоторых диофантовых уравнений». Когда я дошёл до этого названия, то прочел его как «об одном свойстве некоторых дифференциальных уравнений».

Уроки французского и английского в США, Франции и Англии привели меня к многим парадоксальным выводам. Например, студентам по английской литературе в английском Кембридже пришлось объяснять, кто такой Шелли. В Гарварде студентка по истории искусств так отвечала по-французски преподавателю: «Были ли Вы в Европе?» «Да». «Посетили ли Францию?» «Да». «Заехали ли в Париж?» — «Да». — «Видели ли Собор Парижской Богородицы?» «Видела». «Понравился ли он Вам?» «Нет!» «Почему?» «Он такой старый!»

Французская культура ближе к привычной нам\*. Но в 1836 г. Скриб в своей речи при вступлении во Французскую Академию ругал Мольера за то, что тот плохо отразил основные проблемы своей эпохи в своих пьесах. Например, не упомянул об отмене Нантского эдикта (уравнявшего протестантов в правах с католиками). Французский «Словарь глупостей», из которого я взял эту речь, указывает в примечании, что Нантский эдикт был отменен через 12 лет после смерти Мольера. Впрочем, французские философы XIX века ругали Папу Римского за то, что он «сжег Галилея»:

От коллег (и во Франции, и в английском Кембридже) я слышал поправку к этому обвинению: «Здесь, конечно, имя Галилея стоит по ошибке: речь шла, на самом деле, о Тихо Браге». Имя Джордано Бруно знают практически только в России. Папа Римский сказал мне в 1998 г., что Бруно невозможно амнистировать, пока не подтверждена его еретическая теория множественности обитаемых миров (не противоречащая, по словам Бруно, Святому Писанию): «Вот найдите инопланетян, тогда можно будет обсудить

### **Нейтрино, нейтроны и Бруно Понтекорво**

Недавно Академия рысей (Линчей)\* посвятила заседание памяти скончавшегося в 1993 г. Бруно Понтекорво, физика, жившего с 1950 г. в России, работавшего долгие годы в Дубне в Институте ядерной физики. Докладчик рассказал о происшествии, случившемся с Понтекорво много лет назад. Блуждая по окрестностям Дубны, Понтекорво заблудился, но к вечеру нашёл трактор, и тракторист взялся его подвезти. Желая быть любезным, тракторист спросил, чем именно Бруно занимается в Институте. Тот честно ответил «нейтринной физикой» (одним из создателей которой Понтекорво стал уже в 30-е годы).

Тракторист вежливо спросил: «Вы хорошо говорите по-русски,

\* См., например, «Пушкин и Франция» — М: Рудомино, 1999, с. 107 – 113

\* Название этой важнейшей Академии Италии происходит от представления о необыкновенной прозорливости рысей. Расписываясь в списке Линчей, я убедился, что Галилей был шестым из "рысей", а с Понтекорво я встречался на заседаниях то Линчей, то РАН.

но всё же есть некоторый акцент. Физика не нейтринная, а нейтронная!» Рассказывая в Италии об этом происшествии, Бруно добавлял: «Надеюсь, я доживу до времени, когда уже никто не будет путать нейтроны с нейтрино!» Комментируя этот рассказ, докладчик заметил: теперь (хотя Бруно до этого не дожил), что его предсказание, пожалуй, сбылось: сегодня люди ничего не знают не только о нейтрино, но и о нейтроне!»

Читая в Дубне в 2000 г лекцию для учителей «Нужна ли в школе математика», я, ссылаясь на описанное выше предсказание Понтекорво, добавил: «Видимо, все эти прогнозы относятся не только к нейтрино, но и ко всей науке, в том числе и к математике. Наши сегодняшние дискуссии о преподавании математики станут скоро бессмысленными потому, что никто в мире не будет уже знать, чем отличается треугольник от трапеции!»

Правительства всех стран наступают сейчас на науку, культуру и образование (этот процесс американизации часто неправильно называют глобализацией). Л. Н. Толстой писал: «Сила правительства держится на невежестве народа, и оно знает это, а потому всегда будет бороться против образования»\*. Как математику, мне особенно приятно вспоминать представленную Бруно Понтекорво в ДАН (*Доклады Академии наук СССР*) статью «О размерностях физических величин» Ораса де Бартини. Она начиналась словами: «Пусть  $A$  есть унарный и, следовательно, унитарный объект. Тогда  $A$  есть  $A$ , поэтому...», а заканчивалась благодарностью соотруднице «за помощь в вычислении нулей псифункции».

Эту зло пародирующую псевдоматематический вздор статью (опубликованную, помнится, около 1 апреля) студенты моего поколения знали давно, так как её автор – замечательный итальянский авиаконструктор, работавший в России совсем в другой области науки\*\*, пытался опубликовать её в *Докладах* уже несколько лет. Но академик Н. Н. Боголюбов, которого он об этом просил; не решился представить эту заметку в ДАН и только избрание Бруно Понтекорво действительным членом Академии

\* Письмо к А. М. Калмыковой от 31 августа 1896 г. (Л. Н. Толстой. Сочинения. Том 19, с. 364. М., 1984).

сделало эту очень полезную публикацию возможной.

Но, к сожалению, и *Доклады*, и другие математические журналы до сих пор полны «унарными объектами» и подобным вздором. Последнее время, правда, РАН начала передавать права на издание английской версии своих научных журналов издателю «Пентхауза» (видимо, думая: «Туда им и дорога!»)

### **Как отличить хорошую математическую работу от плохой**

Когда я стал заниматься в библиотеке Института Анри Пуанкаре в Париже в 1965 г., французские математики встретили меня очень радушно. Со времен террора в Париже обязательно называть друг друга на «ты», и в кругах интеллигенции этот обычай свято соблюдается до сих пор.

«Я хочу тебя научить, как отличить хорошую математическую работу от плохой, сказал мне один очень хороший математик. Через месяц после того, как моя работа вышла, я захожу в библиотеку Института и отыскиваю нужный номер журнала на полке. Если статья ещё не украдена, значит она была плохая!»

Вероятно, не из-за этого Институт Пуанкаре вскоре закрыли. Сейчас, после перерыва в пару десятилетий, он снова работает, но я не знаю, сохранила ли библиотека прежние патриархальные нравы: ксерокс и электроника сделали вырезывание страниц с нужной статьей старомодным. Радужные французских коллег простиралось до того, что они приглашали меня на конгресс Бурбаки. Когда же я ответил, что совершенно не сочувствую этой секте, то мне объяснили, что они считают меня «московским бурбакистом» (вероятно, напрасно: для меня примеры всегда важнее общих положений, а индукция предпочтительнее дедукции).

В марте 2001 г. я даже удостоился двухчасовой публичной дуэли с представлявшим Бурбаки крупнейшим французским математиком Ж.-П. Серром в Институте Пуанкаре в Париже. Серр доказывал, что ноль положительное число, так как он больше нуля (по Бурбаки это так!). Я же отстаивал мнение, что математика это часть физики и, как и физика наука экспериментальная, отличающаяся только тем, что в физике эксперименты стоят обычно миллиарды долларов, а в математике единицы рублей. Завершая дуэль, Серр сказал, что математика наука столь

замечательная, что двое со столь полярно противоположными взглядами не только оба остались живы после дуэли, но и могут продолжать плодотворно сотрудничать, даже если ни англосаксы, ни русские не признают, что каждое вещественное число больше самого себя, как это очевидно любому французу. Вероятно, именно снобизм "чистых" математиков и подобных им "экспертов" других специальностей заставляет общество и правительства пренебрежительно относиться к фундаментальной науке и поощрять только так называемые "прикладные науки". Например, германские физики были ближе всех к атомной бомбе в начале Второй мировой войны, но атомные исследования были у них сочтены чистой наукой, не имеющей (и не будущей иметь в обозримое время) прикладного значения. То же происходило и у нас. Ленинградский физтех в 1936 г. осуждался за занятия «оторванными от практики проблемами» вроде ядерной физики.

И. В. Курчатов, под руководством которого уже шли первые исследования по физике ядра и частиц, с началом войны немедленно перешёл на «прикладную работу» (по обеспечению безопасности военных кораблей от магнитных мин). И только прекращение американских публикаций по ядерной технике помогло убедить дате начальство в прикладном её значении. П. Л. Капица пытался объяснить Сталину, что «дирижёр должен не только махать палочкой, но и понимать партитуру» (он имел в виду главного руководителя проекта, не имевшего физического образования). Впрочем, в письме самому этому наркомму он писал: «В случае, если я замечу со стороны Ландау какие-либо высказывания, направленные во вред советской власти, то немедленно сообщу об этом органам НКВД» — и этим, по-видимому, способствовал освобождению Ландау из Бутырок.

"Прикладные" математики разработали позже компьютерный метод поиска полезных ископаемых и нашли золото в долине, где геологи его не ожидали. Но при обсуждении этой работы в престижном Комитете один очень квалифицированный математик усомнился и премии не дали. Через некоторое время важный администратор заявил, хваля этого математика: «А какой он был умный!» (тот к этому времени, кажется, уже умер). «Что, спросил другой член Комитета, теоремы были неверные?» — «Какие

теоремы! Золото было подброшено!»

В настоящее время компьютерные мафии всего мира осуществляют долговременный план уничтожения математической (и всякой другой) науки, культуры и образования. Сначала ликвидируются книги и журналы, потом лекции, экзамены и т. д. Академик Е. Л. Фейнберг в замечательной книге «Эпоха и личность. Физики» (М.: Наука, 1999) пишет, что «в условиях террора погружение в науку есть единственная возможность для учёного сохранить себя как личность: были бы только лаборатории и библиотеки». Так вот, их-то скоро и не будет.

Вот ещё пример компьютерного бескультурья. Помещая в Internet мою популярную статью (кстати, без моего разрешения и моего контроля), компьютерщики исказили мою оценку роста метеорологических возмущений за несколько недель. У меня стояло «примерно в  $10^5$  раз» (т.е. возмущения нарастают в сто тысяч раз, делая динамическое прогнозирование погоды на такой срок принципиально невозможным). В электронной версии вместо этого было «примерно в 105 раз». Кроме грубейшего искажения смысла, эта ошибка свидетельствует о полной утрате общей культуры: культурный человек не может сказать ни о чём «примерно 105», если уж «примерно», то 100!

«Литературная газета» (№ 40, 3 – 10 октября 2001 г.) опубликовала в кроссворде «Истинная слава нации» (решение в № 41), что слова «радуга» и «прокурор» пересекаются по общей для них пятой букве радуги и четвертой — прокурора. Истинная или не истинная, но слава нации от такой безграмотности в ведущей московской газете не прирастает. Боюсь, однако, что газета, увы, правильно отражает культурный уровень города и страны, как это и должно быть.

### **Комбинаторика у Плутарха**

Обедая как-то раз с Р. Стэнли в Стенфорде, я услышал его удивительный рассказ о комбинаторике древних. Плутарх в «Застольных беседах» пишет: «Хрисипп (ни сам не исследовал дела тщательно, ни разузнав истину у людей сведущих) говорит, что число комбинаций, которые можно получить из десяти

предложений, превосходит один миллион. На это возразил Гиппарх, указав, что одно утвердительное предложение охватывает включённых в него 103049, а отрицательное — 309952».

Стэнли сосчитал, что первое шестизначное число это число скобочных символов с 10 буквами (внутри каждой скобки может стоять любое число членов, например, символ  $(a, (b, c), (d, e, f), ((q, h), (i, j)))$  допустим). А что такое «отрицательная сторона» — неясно!

Вернувшись в Москву, я рассказал участникам своего семинара в качестве задачи предложенный Стэнли вопрос о расшифровке слов «на отрицательной стороне». Уже через несколько дней М. Казарян и С. Ландо нашли ответ (они использовали компьютер, чтобы отвергнуть конкурирующие гипотезы): «на отрицательной стороне» стоят сложные предложения, в котором одно из них либо простое, либо сложное) отрицается (например, для трехчленных предложений, пригодны (не  $a, (b, c)$ ),  $(a, \text{не } (d, c))$ ), не  $(a, (d, c))$ ), если мне не изменяет память). Полная теория опубликована Казаряном и Ландо в *American Mathematics Monthly* совместно с учениками Стэнли, получившими тот же ответ (расходящийся, впрочем, с указанным Плутархом на 2 единицы — видимо, у Плутарха опечатка). Вычисления требовали решения рекуррентных уравнений с сорока членами, и видимо, во времена Плутарха такие вычисления никого не смущали.

## **Топология поверхностей по Александру Македонскому**

Александр Македонский, согласно Арриану, претендовал на ряд географических открытий. Вот некоторые из них.

1. Открытие истока Нила: это река Инд (по которой Александр спустился до океана, с возвращением вдоль берега Персидского залива из ужасной страны рыбоедов, где не было воды и даже скот кормили рыбой, из которой строили и дома).

Доказательство: Нил и Инд — единственные две реки, которые кишат крокодилами (вдобавок берега обеих рек поросли лотосами). Кстати, древние утверждали, что египетские женщины публично протититуировались крокодилам!

2. Каспийское море: все моря – заливы Океана, и Каспийское



(Гирканское) тоже соединяется с Индийским океаном (северо-восточный угол Каспийского моря продолжается до Бенгальского залива Индийского океана). Потому Александр и не пошёл в Китай, а свернул на юг, он считал, что от Китая его отделяет непреодолимое море.

3. Александр переплывал на кораблях реку Оксус, ныне это Аму-Дарья. Куда же она впадает? Он утверждал, что эта река с Севера впадает в Меотийское озеро (т.е. Азовское море), где она называется Танаис (т.е. Дон). Пересечение с Каспийским проливом его волновало столь же мало, как и пересечение Индом/Нилом Индийского океана.

Хитрости Александра не было границ: он велел своим плотникам построить отряд деревянных "слонов", а оставляя свои лагеря в Индии, он строил огромные "кровати для воинов" и "стойла для лошадей и для слонов", чтобы запугать индусов, преследовавших его армию по следам. Они и в самом деле боялись, и чаще всего уступали без боя. Не уступила, правда, царица амазонок (по одной из версий страна амазонок была там, где теперь Чечня; по другой – к западу от Аджарии, вдоль южного берега Черного (Эвксинского) моря). Зачинаемых на пограничных холмах детей они отдавали отцам, если рождались мальчики, изуродовав им руки и ноги, чтобы они не могли воевать. Девочкам выжигали грудь (отсюда и название: «а-мастон», т.е. безгрудые), чтобы ловчее стрелять из лука.

### **Охота на змей**

В Сапугинском заповеднике (Дальний Восток) я жил неделю (в домике, построенном президентом АН СССР В. Л. Комаровым так, чтобы каждая доска или бревно были из дерева новой породы, в Сихотэ-Алине такое возможно) и работал коллектором, собирая для местного биолога Ю. Короткова змей-щитомордников. Этот смертельно ядовитый щитомордник убивает только с третьего укуса (яд накапливается в печени жертвы в течение всей жизни, так что можно позволить себе быть укушенным лишь дважды).

Мне выдали шёлковый мешок, открытый сверху, чтобы привязать его на пояс и опускать змею, держа за шею, хвостом

вниз, выбраться они не могут, так как скользят, и я приносил щитомордников из своих экспедиций десятками. Надежда была на то, что когда-нибудь яд щитомордников научатся использовать в медицине (как сейчас яд гюрзы и даже гадюки), и тогда Коротков, хранящий в холодильнике запас накопленного яда, разбогатеет; пока же он просто вскрывал приносимых мною змей и мерил их содержимое для научной статистики (рацион, развитие с возрастом и т.д.). Меня поразила парность половых органов щитомордников, которые образовывали на горячих на солнце камнях клубки змей, соединенных иногда как застежки «молния». Я сделал себе рогульку, нажимал змее на шею и вытаскивал её из кучи — важно было не быть укушенным расползающимися участниками клубка, пока засовываешь змею в мешок. Пятиметровые тигры бродили по окрестностям и утаскивали коров, но на меня не нападали.

### **Гильотина и Мария-Антуанетта**

Кладбище Пикпус (рядом с моим домом в Париже) еле справлялось с похоронами жертв установленной на Тронной площади (ныне площадь Насьон) гильотины: голова скатывалась каждые семь минут, иногда даже нарушая спокойствие «вязальщиц», парижских дам, сидевших в первом ряду зрителей со своим вязаньем в руках и спасавших его от потоков крови.

Гильотина возникла вследствие демократических устремлений: при королевском режиме смертная казнь была дифференцированной, в зависимости от сословия. Дворянам отрубали голову, а простолудинов вешали. Революционная власть (Учредительное Собрание) не могла стерпеть такого неравенства, и было решено изобрести «человеколюбивую машину» с одинаковой для всех технологией. Гильотен был врач и член Собрания, предложивший воспользоваться идеей, уже ранее испробованной в Италии.

Слесарь и кузнец Смит, которому поручили сделать модель и испробовать её сперва на моркови, а потом и на баранах, быстро справился с заданием, и результат продемонстрировали заказчику, Людовику XVI, главному республиканцу, торжественно носившему трёхцветную кокарду и начавшему революцию с целью перестройки системы управления, ставшей беспомощной. К несчастью, нож застрял (кажется, в слишком толстой моркови).

Король, с детства увлекавшийся слесарным делом, работавший на токарном станке и изобретавший новые системы замков, подсказал: нож должен иметь не горизонтальное, а наклонное лезвие, тогда не застрянет. Предложение было принято и вскоре облегчило казнь короля. Его обращение к публике заглушили барабанами.

Королева Мария-Антуанетта была осуждена и казнена почти на год позже. Одно из главных обвинений было выдвинуто её восьми- или девятилетним сыном, которого к тому времени сапожник Симон обучил пить, петь революционные песни и ругать королевскую власть. Он заявил, что мать после казни отца стала использовать сына, как мужчину, и его развратила. Суд не поверил и отправил проверять эти показания комиссию во главе с художником Давидом, которая подтвердила, что сын настаивает на обвинении. (Между прочим, замечательный красный цвет на полотнах Давида объясняется тем, что он готовил свою краску из сердец французских королей, доставленных ему революцией. После поражения революции неиспользованные части сердец Давид подарил Людовику XVIII, за что был награждён серебряной табакеркой. Сейчас эти неиспользованные сердца хранятся в Париже в церкви Сен-Поль.)

Последние слова королевы были: «Я не нарочно», — входя на эшафот, она наступила на ногу палачу. Ни гроб, ни могила не были приготовлены, труп бросили на траву, а голову к ногам. Пока королева находилась в тюрьме Тампль (ныне снесённой, чтобы избежать паломничества монархистов), ей притащили из тюрьмы то, что осталось от её любимицы, принцессы де Ламбаль. Принцессу без суда и следствия распотрошили просто за то, что она отказалась осудить королеву. Затем осуществившие эту революционную акцию солдаты украсили себя отрезанными от неё кусками, внутренностями и т. д. Например, один из солдат сделал себе усы из нижней части живота принцессы. Во французском «Словаре глупостей» я прочёл, что столетием позже эти части принцессы ещё демонстрировались в одном бельгийском замке, как реликвия Великой Французской революции.

Теперь от той тюрьмы, видимо, ничего не осталось (она была против Лионского вокзала). Несколько лет назад гильотину

показывали в ночном клубе около церкви Св. Жюльена бедного в Латинском квартале: там пели народные песни средневековой Франции из разных районов и демонстрировали «забывалку»: подземную камеру старой тюрьмы Шатле в центре Парижа, где узника «забывали» (в частности, забывали его кормить и поить).

### **Дамьеновы муки**

Когда Дамьен пырнул ножом Людовика XV в Версале, тот потребовал, чтобы охрана сохранила ему жизнь. Хотя ноги Дамьену и переломали, так что он вплоть до «казни по обычаю предков» лежал, прикованный к специальному матрасу и вставать не мог, он был вполне пригоден для многочисленных пыток, преследовавших цель найти сообщников. Но Дамьен так никого и не назвал, по-видимому, он просто сам был психически не вполне уравновешенным.

Казнь на Гревской площади продолжалась 9 часов и билеты во все окна окружающих площадь домов стоили дорого. Сначала вложили нож в царубийственную руку и сожгли его вместе с рукой. Затем произвели «ущипывание», вырывая куски мяса из удобных мест на плечах, бёдрах, теле. Образовавшиеся раны залили кипящим маслом и расплавом олова или свинца, но и это не помогло: Дамьен только молил Бога дать ему сил и никаких сообщников не называл. Наконец приступили к четвертованию: на помосте закрепили плечи и бёдра специальными скобами, привязали к рукам и ногам четырёх лошадей и стали тянуть, подрезая жилы для облегчения отрыва конечностей по одной: Дамьен ещё кричал, даже когда отрывали последнюю руку, но лошади, видимо, были необученные, и процедура затянулась.

Термин «Дамьеновы муки» сохранился во французском языке до сих пор и прославил французскую культуру. Екатерина II тайком велела начать четвертование Пугачёва с отрубания головы именно для того, чтобы не повредить репутации России. В воспоминаниях Казановы, бывшего в тот день в Париже, сохранились свидетельства о дурном поведении французских зрителей у окон Гревской площади. В первом ряду у окна стояли дамы. Расположившиеся за ними кавалеры на глазах у стоявшего в третьем ряду Казановы использовали представившуюся

возможность для развлечений, причем возникающие вследствие этого стоны дам собравшиеся ошибочно приписывали Дамьену.

Дамьеновы муки не воспринимались населением как что-либо из ряда вон выходящее. Около того места, где теперь Комеди Франсез, раньше была пашня, на которой казнили королеву Брюнео (613 г.), привязав её к коню и бороня ею вспаханное поле. Это было следствием обычной для тех времён семейной ссоры среди потомков Хлодвига, которые не могли поделить Францию между собой (впрочем, Франции тогда и не было, а были страны со странными, ныне уже не употребляющимися, названиями: Нейстрия, Остразия, Аквитания, Септимания). Впоследствии все они разбились на мелкие владения, объединившиеся только ко времени Людовика XIV.

Вассалы французских королей иногда сами были королями, владевшими едва ли не большими территориями. Например, «добрый король Рене», владевший Неаполем, Сардинией, Провансом, Бургундией и Анжу, прославившийся своими стихами и ботаническими занятиями, включая распространение красного винограда.

### **Королева Марго и царство законности**

Отель Сенс, некогда принадлежавший Сенскому архиепископу в Париже, сейчас едва ли не единственный частный дворец (в стиле пламенеющей готики), оставшийся от старого Парижа. В XIX веке здесь была то консервная фабрика, то Лионский вокзал дилижансов. Но в начале XVII века здесь жила бывшая королева Марго: первая жена Генриха IV, с которой он к тому времени развёлся ради Габриэлы д'Эстре (но женился на Марии Медичи, так как Габриэла, от которой у него было трое детей, внезапно умерла, возможно, от яда).

Марго любила развлекаться (в детстве мать, Катерина Медичи, откусила у тринадцатилетней Марго часть зада за любовь к Генриху Гизу, с которым сестру застучали братья, будущие короли Генрих III, Карл IX и Франциск II).

В отеле Сенс она жила по очереди со всеми лакеями и кучерами. Однажды утром она собиралась в карете ехать гулять с очередным

любовником, но кучер, предыдущий любовник, пристрелил соперника в её руках. На следующий день Марго отрубила убитой голову на площади перед отелем. Генрих IV был очень недоволен: он считал себя гарантом законности в стране и имел право помилования. Марго переехала на левый берег Сены в районе Нельской башни и застроила луга вдоль улицы Университета (эти луга против Лувра считались неприкасаемым украшением и не застраивались веками, но Марго считала себя вправе распоряжаться, так как и всю-то Францию Генрих IV получил в приданое за ней).

### **Жанна д'Арк как ведьма и как святая**

История Жанны д'Арк редко излагается правильно. Сожгли её не англичане, а французы; осудил её суд архиепископа Руанского; определил, что она ведьма; потом судили уже судей, но оправдали, так как они представили медицинские свидетельства, что ведьма не могла иметь детей вследствие недоразвития матки, потому и девственница, потому и ведьма. Но был и третий суд, в 1920 году: он признал её святой, Папа Римский благословил это, и теперь она – национальная святая.

История начинается с довольно странного короля Карла VI, который ввёл придворный этикет и ливреи; к его времени относится, например, введение официальной должности главной любовницы короля (ею была при нём Агнесс Сорель), которой представлялись даже иностранные послы. В те времена важные события в королевской семье (роды и зачатия) происходили при обязательном присутствии представителей государства, министров, и свидетельствовались ими письменно. Жена короля, королева Изабелла Баварская, родила ему десять детей. Король очень любил балы и однажды (1392 г.) организовал необычный бал, на котором разделся сам и раздел всех мужчин, вымазал дёгтем и оклеил звериными шкурами, а потом все они кинулись в залу дворца пугать баб. Но освещение было факельное, один факел упал и поджег дёготь, и звери сгорели вместе с дворцом. Короля, правда, спасла одна вдова, платье которой было очень широким. По инструкции гражданской обороны, она обернула короля, и у него сгорели только волосы на голове. Они успели выбраться на улицу

раньше, чем обрушилась горящая крыша.

Но король после этого стал болеть, теряя время от времени разум (некоторые говорили, что бал был не причиной, а следствием этого перемежающегося сумасшествия). Управление делами пришлось взять на себя королеве Изабелле. «Мы понимаем, как Вам трудно, когда король заболевает», говорили ей иностранные послы. Но королева справлялась с делами хорошо и отвечала: «Нет, мне не трудно, когда он болеет. А вот когда выздоравливает – тогда, действительно, трудно!». На самом деле ей помогали управлять королевские кузены, герцоги Орлеанский и Бургундский, по очереди. Но, к несчастью, они стали ревновать королеву друг к другу (кажется, основательно), так что герцога Орлеанского убили, когда он выбирался от своей любовницы-королевы (1407 г.), и началась гражданская война «арманьяков и бургиньонов». Сена сделалась столь красной от крови, что пить воду из неё стало невозможно.

Брантом рассказывает, что причина вражды между герцогами Бургундским и Орлеанским была иной. Людовик Орлеанский пользовался большим успехом среди дам и однажды на пирушке стал хвастаться, что он увешал непристойными портретами своих любовниц свою рабочую комнату. Его кузен, герцог Бургундский Жан Бесстрашный, сумел пробраться в эту комнату и сразу же увидел портрет своей жены. В этом месте своей книги «Жизнь галантных дам» Брантом замечает, что мудрый французский этикет того времени предусматривал: никогда не следует защищаться от следующих трёх обвинений, сколь бы необоснованными они ни были: неверность жены, голубизна рыцаря и трусость в бою. Самые убедительные защитительные доводы лишь наносят защищающемуся вред.

Герцог Бургундский не стал возражать ни жене, ни Людовику Орлеанскому. Однако жена вскоре умерла (возможно, отравленная неизвестно кем), а герцогу Орлеанскому были предъявлены обвинения в неудачном управлении государственными делами. Убийство же его состоялось лишь через несколько лет, причем ему сначала отрубили руку (не знаю, сам ли он рисовал портреты). Вскоре обе стороны поняли, что для победы нужна поддержка со стороны англичан (Столетняя война была в разгаре). Бургундцы с

англичанами захватили Париж и короля, королева переехала в Бурж. Английский король Генрих V, родственник французского, предложил последнему мир на условии, что тот завещает Париж и Францию английскому королю. Тот так и сделал, и вскоре умер (1422 г.). Некоторые считают, что англичане ему помогли умереть, но это не доказано. Французским королём стал считать себя английский, но и он вскоре умер (некоторые считают, что не без помощи французов. Во всяком случае его тело сварили в котле, который и сейчас показывают в музее Венсеннского замка, где он умер). Власть перешла к его сыну Генриху VI, которому было несколько месяцев.

В этот момент французские бояре стали искать Минина и Пожарского, чтобы прогнать англичан, но тут возникла трудность. Два старших сына Карла VI к этому времени уже умерли (кажется, старший на войне, а младший от чумы). Третий же сын интересовался скорее науками, книгами и теологией, не собираясь вовсе быть воином и королем.

Он заявил, что опасается начинать войну с англичанами, так как не уверен, является ли он действительно сыном короля Карла VI. По его словам, мать тут помочь не может, она даже убеждала его, что он сын герцога Бургундского. Если он не сын короля, то английский мальчишка имеет на престол больше прав, чем он. Тогда Бог будет на английской стороне, а от войны только погибнут зря и французы, и англичане. В этот-то момент и появилась Жанна д'Арк. Вся страна знала о затруднениях дофина (будущего Карла VII). Богоматерь, явившись Жанне во сне, убедила её, что дофин – сын короля. Жанна отыскала дофина (в Шиноне близ Орлеана, 1429 г.), убедила его, добилась его коронования в Реймсе и даже приняла личное участие в военных действиях против англичан. У предместья Парижа Сент-Оноре Жанна хотела переехать ров с водой и, меряя мечом глубину рва, была ранена стрелой из арбалета в зад (теперь вблизи этого рва стоит позолоченный памятник Жанне). Стрелу вытащили с большим трудом, кожа была пробита в четырёх местах. Но вскоре бургундцы всё же взяли её в плен и передали англичанам, а те, заявив, что с женщинами не воюют, отдали Жанну преданным Карлу VII французам (которые её и казнили как ведьму, в 1431 г.).



## **Равальяк, французская кухня и уличные пробки**

Вот как рассказал мне о смерти Генриха IV академик Сколем Мандельбройг в 1965 г. Он пригласил меня к себе домой и во время обеда рассказал эту историю.

Приходит раз в субботу вечером Равальяк домой и спрашивает жену: «А что у нас сегодня на ужин?». Жена отвечает: «Ты что, забыл, что сегодня суббота? А наш король Генрих IV сказал, что он хотел бы, чтобы каждый француз ел в субботу вечером жареную курицу». Через неделю повторилось то же самое. Через два месяца, услышав опять о курице, Равальяк вскричал: «Где этот король?». Затем взял в одну руку вилку, в другую нож, выскочил на улицу, а там как раз проезжал король. Равальяк его и зарезал: ведь порядочный француз не ест одно и то же блюдо два раза в год!

Теперь я знаю и множество других версий. Одна из них состоит в том, что, построив Площадь, «король влюбился в шестнадцатилетнюю жительницу одного из домов. Но так как добраться до неё он не мог, то и решил выдать её замуж за своего покладистого двадцатилетнего кузена из семьи Конде. Свадьбу сыграли в Шантильи. К ночи король явился осуществить свои права. Но оказалось, что робкие молодые всё предвидели и уже ускакали на лошадях в Бельгию.

Король потребовал от Бельгии выдать их, но Бельгия не захотела. Тогда он стал готовить войну. И, когда король ехал к своему маршалу Сюлли из Лувра в Марэ для организации этой войны, то Равальяк его и зарезал по дороге (видимо, подкупленный противниками войны), около дома 11 по улице Фероньер (где в асфальт вделана памятная доска в том месте, где застряла карета короля, сцепившись осью с соседней каретой в уличной пробке). С тех пор с пробками ведется борьба; например Новый Мост, построенный Генрихом IV, был сделан широким. Хотя пробки и не было, всё же при выезде с этого места ломовой извозчик задавил насмерть Пьера Кюри.

## **Анна Ярославна**

Королева Франции с 1051 года, Анна Киевская (дочь Ярослава Мудрого) горько жаловалась в письмах отцу, что во дворце

французского короля нет ни одной книги и никто не умеет играть ни на одном музыкальном инструменте. Она говорила на семи языках и подписала брачный контракт с королём Анри I на четырёх: греческом, латыни, русском и французском. Король же поставил четыре креста, а за обедом бросал куски мяса своим собакам, вот и вся культура. В этот момент православие и католицизм ещё не были разделены.

Письма, дошедшие до Киева, сгорели в пожаре Батыева нашествия. Но часть жалобных писем перехватила французская служба безопасности и их недавно нашли в монастыре под Монпелье, куда Анну сослали после того, как она порегентствовала при малолетнем сыне (после смерти мужа, которой она, видимо, либо помогла, либо обрадовалась). Когда Вильгельм Завоеватель высадился в Англии, он разбил в битве при Гастингсе (1066 г.) королевское войско и убил английского короля Гаральда Саксонского. После этого было решено избавиться от родственников Гаральда, и его дочь, Гиту Саксонскую, выдали замуж подальше, за русского князя Владимира Мономаха.

Я думаю, что все последующие русские великие князья, потомки Гиты и, следовательно, Гаральда, имели больше прав на английский престол, чем постепенно убивающие друг друга Плантагенеты, Йорки, Тюдоры и т.д. Но никто из русских князей на английский трон не претендовал. Впрочем, Иван Грозный позже предлагал право убежища, а также руку и сердце, английской королеве Елизавете I, мотивируя это плохим отношением к нему своих бояр, а к ней — английских. Но она ответила, что замуж не хочет и что важнее для обеих стран наладить через Архангельск беспощинную торговлю. Иван написал в ответ: «Я тебе писал о наших государевых заботах, а ты мне — о нуждах своих мелких людишек. Вот ты и вышла, как есть, пошлая дура!»

### **Геннадий Новгородский и обучение молодежи при Иване III**

Около 1500 г. в Новгороде жил архиепископ Геннадий, которого тревожило состояние обучения молодёжи и распространение ересей. Он писал в Москву митрополиту Симону, описывая падение культурного уровня населения: «Иной и учится, но не усердно, и потому живёт долго».

Для искоренения ересей Геннадий советовал использовать испанский опыт: жечь еретиков на кострах. Его предложение было принято лишь отчасти: вместо стандартной церемонии аутодафе («казнь без пролития крови»), в Москве использовали железные клетки, в которых помещался сжигаемый, костёр же разводили на Москва-реке, недалеко от Кремля.

Во времена Ивана III связи России с Европой были уже вполне серьёзными: он даже обсуждал проект брака с герцогиней Бретаньской Анной, которая, однако, взяла в женихи Максимилиана Австрийского, а замуж вышла за французского короля Карла VIII, пытавшегося завоевать Бретань воинской силой. Но двери во дворцах французских королей были настолько низкие, что он насмерть разбил голову о притолоку в замке Амбуаз, где впоследствии жил Леонардо да Винчи, и Анне пришлось снова выходить замуж, за следующего французского короля, Людовика XII.

В России работали даже иностранные врачи (впрочем, к высокопоставленным пациентам кремлевского главного управления их допускали только с условием отвечать собственной головой за здоровье пациента). И если пациент умирал, врача приходилось резать ножом, как овцу, на льду Москвы-реки (под Каменным, если не ошибаюсь, мостом). Дочек можно было выдавать замуж в Литву, оговаривая право православного богослужения. Но это право впоследствии приходилось защищать воинской силой (иногда против воли дочери, не желавшей войны ни своей старой Родине, ни государству своего мужа).

### **Екатерина I и Прутский поход**

Во французских учебниках я обнаружил историю воцарения Екатерины I, которая частично подтверждается всеми русскими источниками (например, энциклопедией Брокгауза и Ефрона или «Записками» Моро де Бразе, переведёнными Пушкиным для «Современника»). Думаю, что Пушкин перевёл скучнейшие эти «Записки» именно для того, чтобы рассказать вдобавок и излагаемую ниже историю (ведь он имел доступ к архивам Петра), но умер, не успев сделать это. В полном виде я этой истории в русских книгах не встречал.

Марфа, впоследствии сделавшаяся императрицей Екатериной I, была служанкой протестантского пастора в эстонском городке, когда началось наступление русских и установилась их власть. Она успешно удовлетворяла целый полк солдат и по своей красоте и привлекательности не имела соперниц. Лейтенант отнял её у своих солдат, но у него её отняли высшие офицеры и в конце концов она досталась фельдмаршалу Шереметеву.

В этот момент Пётр I заподозрил Меншикова (не умевшего ни читать, ни писать: мне показывали в Лондонском Королевском Обществе его ответ на приглашение Ньютона вступить в Общество, подписанный четырьмя крестами), что тот слишком силён в математике и слишком много наворовал. Поэтому Пётр решил проверить его счета, а самого его на это время отправил инспектировать Шереметева. Меншиков купил Марфу у Шереметева, но почуял неладное и, когда Пётр сам явился вслед за ним, подарил красавицу Петру, ликвидировав опасность преследования за растраты.

С тех пор Пётр всюду возил Марфу с собой, дарил ей брильянты, к которым она была равнодушна, и вскоре у них было уже трое детей. Наступила Полтавская битва. Карл XII бежал в Бендеры к туркам. Пётр всё равно его опасался и решил организовать дополнительный поход специально для поимки Карла XII, так называемый Прутский поход 1711 г. Помните, с ним было 4000 пушек, но недостаточно съестных припасов. Вскоре войско близ Ясс попало в окружение в долине, вокруг которой все горы были заняты турками. Пётр сильно испугался и отправил в Сенат лазутчика с письмом, где писал, чтобы следующих его приказов отнюдь не выполняли, потому что, когда турки с тебя живого сдирают шкуру, подпишешь что угодно.

Но тут Марфа, бывшая с Петром в этом походе, предложила ему свою помощь: ведь янычар, командующий турками, всё-таки мужчина. Она поставила условием своей помощи брак и звание российской императрицы (которые она и получила десяток лет спустя, окрестившись в православие под именем Екатерины). Туркам Марфа предложила пушки, порох и всё вооружение российской армии, вместе с большим ящиком всех своих брильянтов. Они потребовали вдобавок срыть недавно

построенную крепость Азов, что Пётр и обещал письменно. После чего русская армия была отпущена (обезоруженная) и вернулась в Россию из этого молдавского похода.

Через пару дней подошли основные турецкие силы и запросили местного начальника, где же Пётр со своим войском. Узнав, как было дело, они посадили этого янычара на кол, но изменить условий мира уже не могли. Почему Екатерина I стала править Россией после смерти Петра не очень ясно. Видимо, решение приняла дворцовая стража (один из альтернативных кандидатов был Меншиков). Незадолго до смерти Петр издал новый закон о престолонаследии, отменявший все правила: просто уходящий монарх назначает совершенно произвольным образом кого угодно в качестве своего преемника. Но Пётр умирал, простудившись на морских работах, довольно быстро. Он успел лишь сказать «Отдайте всё ...», кому же нужно всё отдать так и не сказал.

Последующие властители России умирали почти все насильственной смертью, причём их родственные отношения к предшественникам не всегда ясны. Дочь Петра и Екатерины I, Елизавета, любила танцы и охоту, но не оставила детей и передала престол фактически Екатерине II, жене наследника Петра III, которого убили Орловы при восшествии Екатерины II на престол (при неясных обстоятельствах карточной игры).

## **Екатерина II и И. И. Бецкой**

Сама Екатерина II, принцесса София Анхальт-Цербстская, была привезена в Россию вместе со своей матерью Иваном Ивановичем Бецким, незаконным сыном боярина Трубецкого, долго жившего пленником в Швеции, которому этот перевоз поручила Елизавета и который долго уже был близким другом матери принцессы Софии, ставшей в православии Екатериной II. Бецкой практически ежедневно проводил с Екатериной II по несколько часов, но всегда только вдвоем (злые языки говорили, что они не показывались вместе вследствие чрезмерного сходства их лиц). Екатерина поручила Бецкому заботу о развитии искусств, организацию Академии Художеств, посылку художников в Италию, строительство в Петербурге. Замечательные русские художники XVIII века это целая школа, созданная Бецким, о котором следует

также вспоминать, любуясь Петербургом.

Говорят, что Екатерине II принадлежат все реформы, приписываемые Петру I, которые он только обдумывал, но не успевал реализовывать, проводя большую часть времени за границей: в Амстердаме, в Лондоне и т. д. В 1717 г. он заехал в Париж, где хотел повидать Людовика XIV, но тот уже умер. Пётр I всё же посетил в Сен-Сире его «вдову», мадам де Ментенон. Она уже болела и могла принять царя только лежа в постели. Согласно французской легенде, Пётр подошел к ногам, поднял за угол одеяло, заглянул и сказал: «Я так хотел увидеть, что же так любил великий король?».

«Наказ», написанный Екатериной для народных депутатов, был своеобразным проектом конституционной монархии, но депутаты категорически отвергли всякие ограничения абсолютной монархии, особенно попытки освободить крепостных рабов и запретить цензуру и наказания за мысли (Екатерина хотела карать не мысли и слова, а только преступления). Проект было запрещено печатать не только в России, но и во Франции. В России это запрещение было снято между Февральской и Октябрьской революциями, и снова снято с началом перестройки.

Екатерина II считала, что единственной естественной южной границей России является Индийский океан. Но практически ей удалось довести границу лишь до Тавриды.

### **Крымская война**

История Крымской войны малоизвестна русскому читателю. К середине XIX века тридцатилетняя кавказская война (начатая Шамилем, провозгласившим своей целью захват России) закончилась завоеванием всего Кавказа. Когда Шамиля повезли в Петербург и довели до Ростова-на-Дону, он сказал: «Если бы я знал, что Россия так велика, я не стал бы и начинать её завоевывать».

От Эрзрума, где уже были российские войска, не так уж далеко оставалось до основных стратегических целей: Константинополя и Иерусалима. Николай I приказал своим войскам наступать в сторону Иерусалима, и они быстро завоевали верховья Евфрата

(г. Баязет). Турецкая армия явно не могла достойно сопротивляться. Турки указали англичанам на опасность продвижения России для пути в Индию, а французам – для судьбы Ливана. Было решено организовать против России коалицию, но отвечая не на Кавказе, а напад на Севастополь.

В коалицию допустили ещё и не вполне образовавшуюся Италию, для которой Крымская война крайне важное поэтому событие: первое признание итальянского единства основными европейскими странами. За поддержку своих устремлений Италия заплатила Франции территорией: та получила Ниццу с окрестностями и Савой. И сейчас в профессорских итальянских квартирах на стене можно видеть карту Крыма.

Проиграв Крымскую войну, царь Николай I, по-видимому, отравился, во всяком случае, ни Константинополь, ни Иерусалим Россия не получила.

### **Дашкова и парашюты**

Под Парижем, в Гарше, есть больница, о которой мне рассказали там следующую историю (частично подкреплённую перепиской Пуанкаре и другими источниками, но полностью в опубликованном виде я этой истории нигде не встречал). Согласно французской версии, Екатерина II пришла в некоторый момент к мысли, что следующие мировые войны будут решаться авиацией и что поэтому пора готовиться к противовоздушной обороне столиц (прежде всего от воздушных шаров, которые уже перелетали Ламанш в 1783 г.).

Французские учёные, с которыми она состояла в переписке, посоветовали ей обратиться к своему академику Эйлеру как к главной надежде аэродинамики и, следовательно, воздухоплавания. Узнав, в чём состоит задача, Эйлер рекомендовал назначить для этого президентом Академии Наук лучшего российского учёного, назвав в качестве такового свою ученицу Екатерину Романовну Дашкову. Екатерина II не терпела, чтобы ею руководили, но советы использовала. Она назначила Дашкову не президентом, а директором, отдав под её контроль не только Академию Наук, но и все другие Академии. Дашкова сразу заявила, что главным образом

будет прислушиваться ко мнению Эйлера, а затем навела порядок в финансах, которые принято было в Академии разворовывать при предшествовавших руководителях. Позже она ещё организовала Российскую Академию (ныне — отделение языка и литературы РАН), где уже стала Президентом.

Утверждают, что следующей оборонной акцией Дашковой была разработка парашютной техники, особенно для борьбы с воздушными шарами. Через некоторое время она поехала во Францию и убедила тамошнее правительство (уж не помню, Людовика XV или даже позже), что Париж будет естественной целью германских агрессоров в следующей мировой войне, и что поэтому надо готовить отряды парашютистов.

Впоследствии близ холмов Гарша стали строить базу парашютного спорта. Для маскировки приняли решение назвать строящиеся казармы больницей, а финансирование строительства возложить на министерство вооружений, заручившись поддержкой Академии Наук в лице великого математика Анри Пуанкаре, кузена министра — тоже Пуанкаре, но Раймона (впоследствии «Пуанкаре-война», президент республики с 1913 г.). Анри Пуанкаре поддержал проект, считая его восходящим к Эйлеру, больница была построена, стоит по сей час и носит имя Раймона Пуанкаре. (Лёжа в этой больнице, я и прочитал краеведческие статьи, использованные в настоящей истории.)

Между прочим, во французских статьях об этой истории упоминалось приглашение, якобы посланное Дашковой и её сестрой Воронцовой Пушкину, приехать в Гарш опробовать с парашютом местные скалы. Но он, хоть и был связан и с Воронцовыми, и с Собаньской, прыгать со скал не захотел, так что они прыгали одни, в местах, тщательно отмеченных на картах в сегодняшних путеводителях. Аэродинамические достижения Дашковой мне неизвестны, но она интересовалась науками и сама оперировала коров в имении под Весьегонском, где она была соседкой моих предков.

Предсказания о роли авиации в войне сбылись уже в XX веке. В Венсенском парке Парижа есть памятник садовнику, погибшему там вследствие воздушного боя во время первой мировой войны. Германский самолёт прилетел бомбить Париж, а несколько



французских пытались ему помешать. В результате садовник был убит мотором, оторвавшимся от одного из французских самолётов при маневрировании.

### **Осквернение святыни и абстрактная алгебра**

В Италии, во дворце Урбино я видел замечательную картину Уччелло\*, вернее серию из пяти картин по квадратному метру каждая, так что вместе получается целый комикс, история осквернённой облатки, происшедшая в Париже в 1290 г. Впоследствии я видел ещё одну такую серию из шести картин в Эльзасе, в музее Кальмара. В учебниках история эта рассказывается так (говорят, существовала серия гобеленов в церкви в Париже в Марэ, но она стала теперь армянской и гобелены исчезли): там, где теперь дом 24 по улице Архивов, в XIII веке была аптека еврея Джонатана, ссужавшего деньги за проценты и под залог. Одна старая парижанка отдала ему своё парадное платье в залог, но к Пасхе решила попросить платье на день, чтобы пойти в церковь. Аптекарь согласился, но с условием, чтобы она, причащаясь, облатку не ела, а принесла бы ему.

На второй картине облатка уже передана ростовщику, который делает на ней крестообразный разрез, чтобы накормить своих детей. Но, так как это тело Христово, выступает кровь. Аптекарь бросает облатку в кипящий на таганке котёл, но вода превращается в кровь, перекипает и вытекает из еврейской аптеки на парижскую улицу. На следующей картине парижане упикивают в костёр вырывающихся еврейских детей с курчавыми волосами, тогда как аптекарь и его взрослые домочадцы с характерными носами дымятся спокойно в костре, не обращая уже внимания на ухваты и вилы, которыми орудуют парижане.

Далее пытаются уже христианскую старуху, которую ростовщик выдал, и она лежит, умирая. У её ног дьявол, желающий утащить в ад её душу, отягощенную святотатством; у головы ангел, претендующий на раскаявшуюся душу. На Кольмарской картине в

\*Р. Уччелло (1397-1475). Имя означает «птичка». Он очень любил проективную геометрию и перспективное рисование. Когда вечером и даже ночью жена гнала его спать от этого рисования, он отвечал: «Какая прекрасная перспектива!» и не шёл, так как говорил о своём рисунке.

конце умершую душу оба тащат: один вверх, в рай, а другой вниз, в ад, того и гляди разорвут. Г. Вейль говорил, что в наш век за душу каждой отдельной математической теории борются дьявол абстрактной алгебры и ангел геометрии.

К сожалению, я последние годы не могу найти Кольмарскую серию картин или её фотографии, серия Уччелло из Урбино замечательная, но в ней душу не разрывают.

### **Цезарь и галлы: защита Рима от германцев**

Ещё Цезарь дал яркую характеристику национального характера галлов: претенциозность и стремление к театральности, громкие обещания и беспомощность в деле. Он утверждал, что на галльские обещания защиты Рима от германской угрозы полагаться нельзя: стоит первому немецкому отряду перейти Рейн, как галлы попрячутся в кусты и никак сражаться не будут. По словам Цезаря, галльские войны не способны не только сражаться, но даже просто перейти Альпы: им нужна для этого слишком хорошая пища и слишком хорошее вино, да и то они замёрзнут, не поднявшись еще до перевалов. Галлы, по Цезарю, готовы подписать любые выгодные им соглашения, но никогда не станут выполнять обещанное. Поэтому он и считал необходимым завоевать Галлию просто для защиты от германцев.

Между прочим, погиб Цезарь, видимо, из-за того, что хотел добиться утверждения своего плана войны с германцами: напасть на них с Востока, со стороны России, чего они не ждут. Но войны Рима получили земельные наделы и хотели не воевать снова, а заняться сельским хозяйством, и им пришлось Цезаря ликвидировать.

### **Франция, Гвинея, Индия**

Весь 1965 год я провёл во Франции в качестве студента Сорбонны. (Моим научным руководителем был Ж. Лере, который слушал мои лекции и впоследствии написал по их мотивам книгу, приложив к ней мою статью в виде дополнения.) Министерство образования считало эту поездку поощрением, которое необходимо отработать. Так, в 1966 г. я на месяц попал в Гвинею, а в 1967 г., также на месяц, в Индию.

Политехнический институт в Конакри столкнулся с трудностями при переориентировке от французского преподавания к русскому: русские профессора не желали следовать бурбакистским учебникам и даже избегали проективных модулей и нормальных делителей, настаивая на собственных числах и преобразованиях. Мне было предложено уравнивать требования, что я и выполнил, явившись вскоре по приезду при 35 °С в грозу в гости к гвинейскому министру. Я нарядился для торжественного случая попараднее, с галстуком, но дверь мне открыл министр вовсе чёрный, на котором если и были плавки, то тоже чёрные, так что мы быстро достигли понимания. С тех пор я понял, какую страшную опасность представляет бурбакизм именно для начинающих. «Я вводил в класс структуру группы, говорил мне министр, очень просто: ты будешь  $e$ , ты  $a$ , ты  $b...$ »

Всё же теперь наши преподаватели стали ближе и к группам, и к кольцам, глядишь, и модули поймут. На аэродроме в Нью-Дели встретил меня любезный молодой чиновник и поместил в роскошном отеле «Royal». По дороге я видел умиравших на улицах молодых людей: они не добирали вес до 40 кг, при котором брали в армию в Дели, и умирали с голоду, не вступив в армию. Чиновник объяснил мне, что не только отель, но и еда оплачивается министерством. «Вы даже можете, пригласить гостя».

Я разыграл непонимание и ему пришлось добавить: «А ведь гостем мог бы быть и я!»

Ближайшие две недели я оставался в Дели, вопреки протестам Бомбея, Мадраса, Бангалора и Дарвара, которые меня вызывали, кормил чиновника, который и должен был устроить поездку. Но потом К. Л. Зигель, бывший в Тата институте, узнал из «Times of India», что я приехал, и через день я был у него в Бомбее. Замечательная неделя! В первый же день Зигель увёз меня купаться на Джуху бич (полчаса переполненной электричкой на север от Бомбея). Он утверждал, что сберёт меня от акул.

## **Тигры Тамила в швейцарском консульстве в Париже**

Математики, пригласившие меня в Цюрих, сообщили мне в Париж, что разрешение выдать мне визу уже неделю как выслано

из Берна в Париж в посольство, так что надо сходить в швейцарское консульство за визой. Я отправился туда с утра и застал очередь человек в сто, передо мной стояла группа усатых молодых людей со значками «Тигры Тамила». Простояв в очереди несколько часов (прямо как в Москве), я добрался, наконец, до нужной каморки, где было три окошка. Неожиданно, мои тигры любезно пропустили меня вперед, и мои документы начала изучать самоуверенная служащая консульства. Она быстро просмотрела свои толстые книги и сказала мне: «Никаких разрешений на Вас не поступало. Если они выслали их неделю назад, то через месяц, вероятно, дипломатическая почта из Берна их доставит: ведь расстояние тут не маленькое. Я здесь сижу, чтобы не пускать таких, как Вы».

Вернувшись в свой Университет, где мне предстояло читать лекцию, я заглянул в почтовый ящик в канцелярии и обнаружил в нем письмо из Швейцарского посольства в Париже: «Поступило разрешение выдать Вам визу, пожалуйста, зайдите за ней». Письмо было отправлено два дня назад. На следующий день я снова отправился в консульство. Тигров Тамила не было, и, когда подошла моя очередь (и мне досталось идти к той же самоуверенной девушке), я пропустил следующего за мной в очереди несчастного, а сам пошёл к соседнему окошку, как только оно освободилось. Все документы были на месте и визу мне немедленно выдали.

### **Отдел планирования**

При подготовке к Всемирному математическому конгрессу в Киото я был членом Программного комитета, который собирается несколько раз для отбора приглашенных докладчиков. Второе заседание было в Париже, а через неделю после него я должен был быть в Пизе по приглашению Высшей нормальной школы, а затем в Риме по приглашению Академии Линччей. Приехав в Париж, я сразу же отправился в итальянское консульство, но там меня разочаровали: «У Вас служебный паспорт; столь важные дела решает посольство, а не консульство!».

В посольстве были вежливее: «Мы немедля вышлем визу, через месяц после того, как Вы доставите обращение, подписанное

советским посольством».

Отправляюсь туда; тоже вежливы: «Отдавайте, паспорт, мы пошлём его в Москву, через два месяца будет ответ и ещё через три недели мы составим письмо итальянцам». Не отдав паспорта, я отправился на заседание Программного комитета (в Коллеж де Франс). «Что ты грустен нынче», спрашивает меня К., председатель Комитета. Объясняю. Он улыбается и зовёт секретаршу: «Николь, вот паспорт, сходи в итальянское посольство за визой». К обеду Николь принесла визу. Я, поражённый, стал учиться её искусству.

Это так просто, — говорит Николь. Всё дело в отделе планирования. Что за отдел? Ну, это в каждом посольстве есть такой, чистая теория матриц! Каких матриц? Матрица это таблица с двумя входами. Входы: все государства. В клеточке  $i, j$  стоит число визовых неприятностей государства  $i$  государству  $j$  в прошлом году. Если хотите улучшить отношения уменьшите число неприятностей, ухудшить увеличьте. Это они и планируют. На ком реализовать план чиновнику всё равно. Вот и надо сделать, чтобы у него не было интереса ухудшить на Вас!

И как же этого добиться? Очень просто: я ему объяснила, какие у Нобеля были отношения с Миттаг-Лефлёрмом из-за жены! Но это легенда! Знаю, но чиновнику зачем это знать? Он узнал от меня, почему нет Филдсовских медалей по математике! Но я же не имею отношения к Филдсовским медалям! И это я знаю, но чиновнику и это незачем знать! Николь знаменита также замечательным детективом, описывающим убийство в математическом институте (Бюр-сюр-Иветт под Парижем, где она была секретарём). Следователь допрашивает секретаршу, как мог сделаться известным секретный разговор директора в его звуконепроницаемом кабинете всему институту.

Очень просто, В комнате секретарши есть сделанный из картона раструб; приложив его к стене, можно всё услышать. Но откуда Вы это знаете? Знаю? Я это изобрела! Остальные героини детективной истории столь же узнаваемы.

## Горные львы над Стенфордом

В пятнадцати километрах от моего дома в Пало Альто (около университета Стенфорда) «альпийская дорога» на запад к морю поднимается вверх на километр до «небесного шоссе» и идёт по лесу, пересекая разлом Сент-Андреас (по которому Калифорнийская плита сталкивается с Североамериканской и из-за которого в Сан-Франциско бывают землетрясения). Этот разлом выглядит просто как метровая канава с более мокрой растительностью, но берега сдвигаются один относительно другого со скоростью порядка сантиметра в год, так что есть скала, на юг от Сан-Франциско, половина которой (в точности такая же геологически) унесена километров на 500 на юг, к Лос-Анджелесу.

В этом лесу есть «русская ферма», заброшенный яблоневый сад (где я набирал за несколько минут мешок яблок, каждое величиной с детскую голову), а неподалеку заброшенная роща грецких орехов (которые я по осени тоже собирал рюкзаками: я ездил туда на велосипеде чуть не каждый день). В одном месте, где «альпийская дорога» пересекала разлом, произошёл оползень, и асфальтовое полотно дороги было видно под обрывом, метрах в десяти от оставшейся вдоль верхней части обрыва трехсантиметровой полоски асфальта, по которой я и пересекал оползень, с велосипедом на плече, держась за торчащие из обрыва корни окружающих деревьев.

При входе в лес висело предупреждение, что следует быть осторожным, так как здесь водятся горные львы. Эти звери неподалеку, близ Беркли, незадолго перед тем задрали каких-то детей, так что вопрос охранять ли их, или же перебить, решали голосованием. Решили всё же сохранить, хотя зверь этот раза в два больше рыси (которая здесь тоже водится и даже переходит шоссе, видя машины). Разница заметная: прежде всего, у рыси уши сверху заострённые, а у льва совершенно круглые. Инструкция предусматривает, что лев скорее избегает встречи с человеком, если тот сам не пристаёт (следите за детьми!). Нельзя кидать в него камни и ветки: когда будете нагибаться, зверь будет считать Вас маленьким животным и может напасть. Лучше встать на цыпочки и ещё поднять руки, тогда он будет бояться и не нападёт. Последний пункт инструкции: «вызовите полицию» (видимо, в лес не ходят

без радиотелефона?).

Когда в лесу появились грибы (у нас они назывались бы вешенки, а у американцев, устричные грибы), я отправился за ними. Уже набрав полный рюкзак и привязав его к багажнику велосипеда, напоследок пошёл посмотреть на оленью водопойную тропу, где лев много наследил, охотясь на оленят. Оленей я и спугнул, но, вернувшись, обнаружил, что лев у велосипеда тщательно изучает содержимое моего рюкзака (в кармане был бутерброд с колбасой). Я обошёл это место в глубине леса и подошел сзади, но метров за 10 до велосипеда лев почуял неладное и стал на меня смотреть. Минут 15 мы так изучали друг друга, но потом на соседней тропе показались ещё велосипедисты, лев испугался и убежал, а я съел бутерброд и вернулся домой готовить грибы.

Большинство американцев в грибах не разбирается, но в Санта Круз есть специалист, который дает уроки. Сначала он показывает видеофильм грибного места: на колючей проволоке надпись «Частное владение». Некоторые грибы монополизировали японцы. Они сдают собранные корзины в построенные ими в лесу приёмные пункты, откуда машины ежедневно отвозят их на расположенный неподалёку аэродром. В тот же день грибы на самолёте везут продавать по доллару штука в Токио. Собрать их не-японцу опасно: могут застрелить.

## Гонконг

Из семи университетов Гонконга (где я пробыл семестр) я больше всего времени провёл в построенном местным жокей-клубом на своей земле (рядом с местным Голливудом) «Университетом науки и технологии». По утрам, идя на работу, я видел страшную сцену кровавого убийства девушки на балконе соседнего домика, стоявшего среди тропического леса, уже принадлежавшего киностудии. Возвращаясь вечером обратно, я видел ту же сцену: всё ещё доснимали дубли.

Расстояние от Университета до океана по горизонтали: один метр, а по вертикали 100 метров. Вниз можно спуститься на трёх лифтах. Верхний лифт внутри «академического корпуса» (где

учебные аудитории, библиотеки и столовые), средние 10 этажей – аспирантское общежитие, а третий лифт (нижние 10 этажей) студенческое. Лифты одинаковые, за исключением таблички с надписями, устанавливающими максимальную нагрузку: там написано, помнится, 1600 кг и 18 человек — в академическом корпусе, 1600 кг и 20 человек в аспирантском, 1600 кг и 24 человека в студенческом. Студенты объясняли мне, что изготовители лифтов использовали формулу Эйнштейна, согласно которой знания имеют массу.

Из нижнего выхода легко пройти к морю, где плавают акулы. «В прошлом году здесь съели трёх человек, сказали мне местные жители. Но сейчас, в октябре, температура воды упала ниже 26 °С и они уже уплыли к экватору». Я плавал подолгу и акул не обнаружил. По воскресеньям мы с компанией (и профессоров, включая Смейла, и студентов) путешествовали по окрестным горам. Эта сорокакилометровая страна устроена так, что расстояние до воды (океана, залива или порой озера или водохранилища) везде меньше километра; берег очень изрезан, пара сотен островов, заросло лесом всё, что не застроено небоскребами (где в комнате нормальной величины живут 105 человек, ночуя на нарах в три смены). В лесах водятся обезьяны, змеи, одичавшие коровы и стерегущие их одичавшие собаки (последнего тигра убили в войну). Есть лагерь для сотни – другой тысяч вьетнамцев, ждущих отправки самолётом на родину три лучших года своей жизни. По ночам на улицах продают гут же за жариваемых змей; охотятся на американцев филиппинские девушки, приезжающие сюда делать карьеру и на заработки.

Гонконг образовался вследствие борьбы Китая против завезённого сюда англичанами из Индии опиума. На уничтожение своих опиумных складов в Кантоне англичане ответили войной, в ходе которой позже даже сожгли Пекин. В качестве компенсации за опиумные склады им и был передан «остров Виктория» — главная часть Гонконга, к которой они впоследствии прикупили близлежащий полуостров Колун. Вся эта местность была практически нежилой, так как прежде здесь жили пираты, для борьбы с которыми сожгли всё жильё и запретили селиться здесь заново. Борьба с самовольным мореходством была здесь давней



традицией с тех пор, как предполагаемый наследник императорского трона отправился на кораблях на запад вдоль азиатского южного берега, а посланные вдогонку правительственные морские экспедиции не нашли уплывших, хотя гнались долго и даже оплыли вокруг Африки.

С тех пор дальнейшее мореплавание и было запрещено, потому-то китайцы и не доплывали ни до Европы, ни до Америки.

### **Бразильские путешествия**

В Рио-де-Жанейро я проводил большую часть времени у моря, чаще на Ипанеме, чем на Копакабана, а иногда и ещё на каком-нибудь пляже шириной в полкилометра и длиной километров в двадцать, которых в окрестностях немало. Обычно я уходил из отеля в плавках, с ключом от комнаты, привязанным на шее, подобно крестику. Иногда переплывал на какой-нибудь остров в паре километров от берега. Вылезти на скалистый берег было трудно из-за того, что эта вертикальная стена была вся покрыта морскими ежами с очень острыми и легко обламывающимися внутри моих ног дюймовыми иголками, а высота волн была никак не меньше пяти метров у этой десятиметровой скалы. Но я все же ухитрялся вылезти и находил на острове массу интересного и даже вкусного (с риском для жизни).

Вдоль берега часто идет шоссе с напряжённым движением, и жители подолгу ждут возможности перейти его. Они не ругаются, как сделали бы наши, а в ожидании танцуют, не успев познакомиться и почти без одежд. Меня предупреждали, что после шести вечера, когда почти мгновенно наступает темнота, быть на берегу опасно, но я, хотя и не заходил в бедняцкие фавеллы, где следует держать оружие наготове, оказывался иной раз на тёмном берегу в неположенное время (скажем, когда шёл на фестиваль ламбады в соответствующий клуб).

Однажды в темноте на меня напала группа подростков лет пятнадцати, не помню, было их трое или пятеро, но меньше десятка. Они спросили у меня, который час, хотели же они добыть себе мои часы. Когда я осознал их намерения, то сразу позабыл все инструкции («всегда имей наготове столько-то денег и откупайся

по первому требованию, а то убьют»). Подкорка немедленно выдала удививший меня самого поток чисто русского языка, воспроизвести который здесь невозможно. Кроме того, в руке меня была сумка с тысячедолларовой видеокамерой, довольно тяжелой, но не заметной нападающим. Размахнувшись ею, я быстро уложил одного из подростков на песок у своих ног (надеюсь, не изуродовав его серьезно, так как камера осталась неповрежденной), ещё один, испугавшись, убежал с криками (видимо, он хотел найти полицейского, но ближе километра никого не было), а остальных мне удалось быстро разогнать, размахивая своим смертоносным оружием.

Фестиваль ламбады оказался очень интересным, хотя и утомительным. Он продолжался с вечера до утра в огромном зале, тесно набитом и студентами, и экспертами постарше. Некоторые пары были замечательными балетными мастерами, и организаторы должны были испросить у них дозволения разрешить мне видеосъемку. Разрешение было быстро получено, жаль только, что видеопленки у меня было меньше, чем хотелось бы, и что многие замечательные части праздника происходили в почти полной темноте.

По Бразилии я путешествовал примерно месяц и повидал много замечательного: леса вдоль Амазонки и «рыбу-быка» (подводную корову, пасущуюся снизу на плывущих по Амазонке в виде островов лугах), города Ресифи и Форталезу, Ауро-Прето и Белем, Белу Оризонте и старые французские колонии на океане ... Граница Бразилии определяется давним решением Папы Римского, поделившего Новый Свет между Испанией и Португалией при помощи меридиана, к западу от которого всё «испанское», а к востоку «португальское». Это означало делёж Атлантического побережья, а вглубь страны и те, и другие двигались на запад по параллелям. Из-за этого северная и южная границы Бразилии (объединяющей всё португальское) выходят на побережье в точках одного меридиана.

В отличие от испанских колоний, превратившихся во многие независимые государства, португальские колонии вскоре стали единой Бразильской Империей, выбрав императором сына португальского короля. Позже эта империя спасала королей

Португалии от больших неприятностей, как революционных, так и вызванных наполеоновской агрессией.

## Лейбниц как предтеча Бурбаки

Лейбниц считал дедуктивные умозаключения убедительным доказательством существования Бога. Ибо наблюдение частных случаев, по его мнению, не может привести нас к общим идеям. И, если мы всё же их постигаем, то только путем самонаблюдения, наблюдая не внешний мир и явления природы, а следя за тем, как работает наш мозг, куда все эти универсальные принципы, из которых все частные случаи выводятся, были, по мнению Лейбница, изначально вложены Создателем. «Ибо, говорит он в письме королеве Софии-Шарлотте, которую он хотел таким способом защитить от влияния "безбожника Ньютона", к этим универсальным законам можно привести даже ребёнка, умело задавая ему, по образцу Сократа, нужные вопросы».

Интересно, что проклятия по адресу индуктивного метода раздавались и позже, например Абель писал в письме Ханстину в 1826 году о «несчастном методе выводить общее из частного». Ханстин был соперником Абеля в глазах Университета в Осло: Абель просил 200 талеров, так как был очень беден (французы утверждали даже, будто он возвращался из Парижа в Осло по льду пешком), а Ханстин получил 9500 талеров для организации экспедиции в Сибирь с целью поисков четвёртого (!) магнитного полюса.

Прикладная наука вытесняла фундаментальную уже тогда: Абель заметил, что в Париже математики интересуются только астрономией, теорией теплоты, оптикой и теорией упругости, исключая разве одного Коши, сохранившего интерес к чистой математике, но совершенно свихнувшегося. Лагранж (в основном, в Берлине) занимался математикой, по его словам, только потому, что отец не оставил ему достаточного наследства. Работу Абеля дали на отзыв Коши, и он её потерял. Лейбниц думал, что  $d(uv) = du \cdot dv$  и что кривая пересекает свою окружность кривизны с кратностью 4.

В одном французском физическом журнале («Fusion», 2001,

№ 84) я прочитал недавно, что вся слава Ньютона якобы дутая и похищенная у Лейбница, да вдобавок и создана она французом Аруэтом (более известным под своим псевдонимом «Вольтер»).

Аруэт, пишут французы, учился в Париже в лицее Людовика Великого, где его учитель, иезуит, воспитал в нём крайний антисемитизм, который и был основой вольтеровского атеизма и антихристианских настроений (ведь Иисус был еврей!). Ради борьбы с христианством Вольтер решил лишить главного его учёного поборника, Лейбница, авторитета математика, и даже поехал ради этого в Берлин, где, споря с королём Фридрихом, пытался развенчать Лейбница. Но это не удалось. Тогда Вольтер поехал в Лондон к Ньютону, чтобы оспорить приоритет Лейбница. Но он опоздал на несколько недель: Ньютон умер, и только его племянница, Катерина Бартон, рассказала Вольтеру о яблоках, при помощи которых ему и удалось создать культ Ньютона.

В споре с Вольтером король Фридрих проявил свою учёность, сказав: «На каждом континенте есть обезьяны, кроме лишь Европы, где вместо них французы!». Вольтер возражал: «Нет, французы это помесь тигра с обезьяной».

Брат Марата, Будри, в своём курсе литературы в лицее Царского Села, рассказал эту историю, и одноклассники Пушкина закричали: «Помесь тигра с обезьяной это же Пушкин!». С тех пор в Лицее у него было прозвище "француз".

### **Происхождение математики: путь из Египта в Грецию**

Мы сейчас склонны недооценивать познания древних, в особенности догреческих учёных. Теорема Пифагора была известна древним вавилонянам за тысячу (а то и больше) лет до него, вместе с целочисленными треугольниками типа (3, 4, 5). Древнеегипетский учёный Тот изобрёл числа (натуральный ряд), алфавит (фонетический, взамен иероглифов), геометрию (землемерие), игру в шашки, музыковедение. Пифагор перевёз в Грецию геометрию, Евдокс, арифметику, Орфей, музыку, Платон, философию. Всё это было у египетских жрецов засекречено, как и радиус земного шара, который они знали с ошибкой порядка процента (греки позже считали радиус вдвое большим, но по

ошибке). Из-за этого Колумба не хотели пускать, дескать, до Индии воды не хватит.

### **Мотивировка при преподавании математики в Израиле**

В трудах израильской конференции по школьному образованию я прочёл (по-английски, хотя большая часть «трудов» была на иврите) директивный обзор, показавшийся мне своеобразным вариантом советских педагогических сочинений (не знаю, был ли автор приезжим из России педагогом).

Главная идея состояла в том, что никакие европейские или американские методы, идеи и принципы в израильских условиях не пригодны. Дело в том, писал автор, что европейцы стремятся воспитывать человеческую личность, а американцы давать практически пригодные знания и навыки. В израильских же условиях главная цель иная: надо воспитать настоящего еврея, и будь он развитой личностью или мастером по компьютерам толку от такого образования нет, если он не будет воспитан, как настоящий еврей. Именно эту цель, а не обучение таблице умножения, должны преследовать уроки математики, что касается географии или истории, то здесь всякому ясна специфика еврейского подхода.

Дальше в докладе предлагался пример из математики. В американском задачнике была такая «практически полезная» задача: отец подарил сыну на день рождения 100 долларов, а велосипед стоит 500. Деньги сын кладёт в банк из расчета 5% годовых. Спрашивается, через сколько времени выросших денег хватит на велосипед? Американские педагоги считают, что американский подросток условием такой задачи достаточно мотивирован, чтобы начать понимать нужную математику. Но у нас в Израиле, говорит автор доклада, такая мотивировка не действует. Чтобы сделать эту задачу доступной израильскому школьнику, нужно лишь слегка изменить условие: эти сто долларов нужно ему реально дать.

«Технион», находящийся в Хайфе, присудил мне очень почётную научную премию. Вручение этой премии это большой праздник, на который приехало множество выпускников и друзей

Техниона, в особенности из США (где работал второй лауреат, ранее много поработавший в Москве генетик). За несколько минут до вручения премии ко мне подошёл декан математического факультета и, смущаясь, задал мне вопрос. «К нам поступил сигнал, что Вы — антисемит. Это правда?» Пришлось рассказать ему о своих трудностях в Москве.

Участвуя впоследствии в различных международных организациях, я убедился, что многие на вид вполне уважаемые математики принципиально всегда голосуют против еврейских кандидатов столь же охотно, как и против русских (которым нередко принадлежат результаты, за которые награждают других, и это случается даже с Нобелевскими премиями по физике, химии, биологии, с премией Техниона и др.). Американцы поддерживали недавно научную конференцию, от участников которой требовалось не иметь в паспортах израильской визы. Израильское консульство в Москве отказало в визе моей жене, заявив, что у них и так хватает русских проституток, Впрочем, позже их консульство в Лондоне визу всё же выдало, и в Израиле с нами обращались очень хорошо.

### **Борьба с иностранцами и с их языками**

Однажды заходит ко мне в офис моего Университета в Париже страшный на вид гражданин с длинными чёрными усами и говорит: «Вы напрасно послали сегодня электронное письмо, не следовало». «В чем дело?» Отвечает: «Я из Отдела безопасности, а Вы иностранец. Мы обязаны читать все получаемые и отправляемые Вами письма. Именно поэтому Вы получаете всю свою корреспонденцию уже распечатанной. В данном случае Вы получили от NN письмо, которое он попросил Вас разослать своим коллегам, и Вы так и сделали. А вот этого-то Вы делать и не должны были. Впредь остерегитесь!»

Видимо, больше ко мне претензий уже не было, мне о них не сообщали. В данном случае, если мне не изменяет память, речь шла о возмущении французов проектами новых законов, направленных на прекращение общения с заграницей. Какой-то профессор другого университета организовывал демонстрацию протеста и хотел, чтобы об этом знали профессора и даже студенты всех

университетов: он публиковал объявления и в газетах, и в электронной почте.

Один из законов (который в конце концов так и не приняли) предусматривал большие штрафы за использование иностранных слов (например, «week-end») в рекламе. Помню возражения против слова «ниша», которое мне казалось французским. Но, оказывается, «англо-саксы» (традиционное наименование «врагов», соответствующее нашему «космополиты»), заимствовав это французское слово, стали употреблять его в выражениях вроде «экологическая ниша», и вот в этом-то смысле оно должно было рассматриваться как иностранное и должно было обладываться налогом.

Видимо, всё же, я не на таком уж плохом счету: французское Министерство науки, образования и технологии пригласило меня участвовать в работе их недавно созданной Комиссии по защите Наследства французской науки от иностранцев.

### **«Наша Манчжурия»**

В гостях у одного кембриджского (Англия) математика я чуть не подрался всерьёз с японским профессором-биологом. В это время наш Президент собирался съездить в Японию, договориться о передаче южных Курильских островов. Но в газете в этот день появились сведения, что визит не состоится по каким-то техническим причинам. Желая быть любезным, я сказал японскому профессору: «Сегодня ли, завтра ли, во всяком случае этот вопрос будет в конце концов решен: хорошие отношения с Японией для нас жизненно важны». Но японец стал чрезвычайно агрессивным: «Никогда!! Япония никогда не простит России, что вы отняли у нас нашу Манчжурию». Дальнейшая дискуссия (которую вели уже американцы и англичане, а не я) показала, что представления нашего оппонента и об истории, и о географии весьма сомнительные. Главное, что его возмущало, было то, что, по его словам, Россия проиграла войну Японии и просто использовала испуг, произведенный американской атомной бомбой, чтобы захватить себе Манчжурию (Китай он вообще не признавал).

Случалось мне видеть и немцев, проводивших свою восточную границу в Заволжье, но они никогда не были так самоуверенно

агрессивны. Когда немецкий ребёнок в Бонне, барахтаясь в луже лежа на спине, кричал матери: «Ich bin Ausländer»\*, она краснела и старалась заглушить политически некорректного сына.

Старушка, приехавшая из деревни, спрашивала на вокзале в Дюссельдорфе: «Где у вас тут улица Адольфа Гитлера?» Жители разъяснили ей, что у них такой улицы нет, а есть *улица графа Адольфа* (у нас это был бы Юрий Долгорукий, а граф Адольф – средневековый основатель Дюссельдорфа). Старушка выразила своё удовлетворение словами: *Он это заслужил!*

### Из истории французской экономики

Долгое время основу французской экономики составляли свиньи: маленького поросёнка с полосатой, как у бурундука, спиной («маркасана») приносили из лесу, убив там мать, выкармливали дома (даже грудью), потом он делался «рыжим зверем» и его отпускали в лес, где он становился «чёрным зверем», а к трём годам «раго». Потом на «четырёхлетку» уже можно было охотиться, позже он «кабан», потом «старик» и, наконец, одиночка, «солитер», который бросает семью и никого не подпускает.

Однажды (2 октября 1131 г.) в Париже на улице Сен-Жан молодой французский принц Филипп, возвращаясь вечером верхом от девушки, наткнулся на выскочившую из какого-то двора свинью. Конь упал, принц сломал шею и вскоре умер. Тогда король запретил держать в Париже свиней. Но монахи монастыря Святого Антония запротестовали: когда Святой Антоний, был в пустыне, он жил там не один, а со своим любимым поросёнком, поэтому, дескать, нашему монастырю без свиней нельзя.

И король издал поправку, разрешив держать свиней даже не только в монастыре Святого Антония, но и во всём его районе. Это правило сохранилось надолго и Антониевская Слобода сделалась раем для трудящихся, которым никто не платил барщины и которым была нужна свинина для еды. Сегодня здесь в каждом доме на улице Сент-Антуан мебельная фабрика и магазин по продаже мебели (последовательно: в стиле Людовика XIII, Людовика XIV и т. д.).

\* «Я — иностранец!» (нем.)



## Рамануджан и Харди

Харди (1877-1947) в Кембридже написал свои лучшие работы. Обычно он делал их с Литлвудом, живя в одном (Тринити) колледже (где до сих пор хвалятся их активным участием в выборе порто для украшающего их обеда и праздники погребца). Они встречались за трапезами трижды в день, за "высоким столом", где обедал Ньютон. Но правила Тринити строго запрещают разговаривать за едой о своей науке и вообще о предметах, более серьёзных, чем погода: ведь даже при разговоре о левостороннем движении возникает риск спора, нарушающего пищеварение. Потому senior fellows («старшие товарищи») обязаны при первом же разногласии провозгласить примиряющую формулу: «So we agree that we disagree» («Итак, мы все согласны, что у нас есть разногласия»), и тогда спор прекратится.

Впрочем, обязанностей у senior fellows много. Например, огромный квадратный двор колледжа, засаженный вековым газоном, имеет четыре асфальтовые дорожки к фонтану в центре. На этом газоне стоят объявления: «Keep off the grass, unless accompanied by senior fellows» («Не ходите по траве, исключая сопровождение старшего товарища»). Однажды я пытался пересечь двор по этим дорожкам, но мастер колледжа (сэр Майкл Атья) силой спихнул меня на газон и заставил идти по диагонали: «Во-первых, ты сам senior fellow, а во-вторых ты идёшь с начальником колледжа!»

Из других объявлений замечательно запрещение входить в колледж с велосипедами и собаками. Говорят, что раньше запрет был на лошадей и собак. Байрон, будучи студентом (в холле Тринити колледжа висит прекрасный его портрет тех времён) был очень недоволен этим запретом и, в конце концов, поселил в своей келье колледжа медведя. На возражения начальства он заявил, что это новый ученик, а вовсе не собака и не лошадь: он куда умнее большинства студентов. Традиция велит уважать правила.

Итак, Харди и Литлвуд никогда не говорили о математике. Зато каждый из них писал весь день, а вечером отправлял написанное другому (через сторожей колледжа, дежуривших у входа и разносивших ежедневно почту, что продолжается и сейчас).

После многократного путешествия текста туда и обратно он превращался в очередную замечательную совместную статью, происхождение которой иначе было бы трудно объяснить, учитывая разницу характеров и стилей обоих авторов. Стиль Литлвуда ясен из его замечательных воспоминаний «Математическая смесь». Литлвуд был альпинистом, использовавшим сложность готической архитектуры Кембриджа для скалолазания. А в математике он был прямым наследником Ньютона и Пуанкаре, подрабатывая даже и работами по артиллерийской баллистике. Я был поражён, обнаружив его оценки длительности сохранения адиабатического инварианта в гамильтоновой системе (предшествовавшие и моему доказательству вечного сохранения этого инварианта, и знаменитым экспоненциальным оценкам Нехорошева в теории КАМ). Быть может, ещё поразительнее то, что «теория хаоса» в динамических системах, включая «подкову Смейла», уже была разработана и опубликована Литлвудом (и Литлвудом с Картрайт, которая мне об этом и сообщила) задолго до Смейла, Синая, Алексеева и Аносова.

Харди же, ничего в динамических системах и в артиллерии не понимал: он был "сверхчистым" снобом, гордившимся больше всего успехами в теории чисел, которую он, вслед за Гауссом, называл «королевой математики» (объясняя сходство теории чисел с королевой полной бесполезностью обеих). Похвалить при Харди какое-либо математическое достижение за его нематематические приложения означало полностью себя скомпрометировать в его глазах. И вот, однажды Харди получил удивительное письмо из Мадраса с неожиданными математическими утверждениями, которые он не смог ни доказать, ни опровергнуть. Подумав некоторое время о том, гений ли автор или неудачник, Харди в конце концов пригласил его в Кембридж, где они затем несколько лет работали столь же оригинально и успешно, как с Литлвудом, с этим молодым индусом, Рамануджаном (бронзовый бюст которого украшает теперь Тата Институт фундаментальных исследований в Бомбее).

Результаты Рамануджана (1887 – 1920) оказались действительно гениальными, хотя путь, по которому он до них дошёл, и сегодня

остаётся достаточно таинственным, тем более, что математическое образование Рамануджана оставляло желать лучшего. Вероятно, Рамануджан часто опирался на эксперимент, — на скрываемые им большие вычисления (компьютеров тогда не было). Но всего через несколько лет ещё молодой Рамануджан умер, оставшись навсегда самым славным именем в математике Индии.

Когда я жил в Кембридже в качестве senior fellow того же ньютоновского Тринити-колледжа, мои индийские коллеги, жившие там же, рассказали мне малоизвестные подробности жизни Рамануджана. Однажды Рамануджана навестил в Тринити индусский физик Чандрасекар, приехавший из Америки. Комната друга показалась ему холодной, но Рамануджан объяснил ему, что по-настоящему он мёрзнет только по ночам, ведь в Кембридже бывают даже заморозки! Гость отправился осматривать условия в спальне, и тут выяснил, что Рамануджан спал на одеялах, не подозревая, что ими нужно укрываться (в Мадрасе этого не делают). Именно поэтому он так и мёрз, поэтому и заболел (кажется, сначала воспалением лёгких, а потом чахоткой), и эта болезнь и свела его в могилу совсем ещё молодым.

В этой истории, я думаю, виноват более всего снобизм Харди и его бурбакистская бесчеловечность, которые не позволили ему навесить своего больного ученика, жившего в одном с ним доме, и во-время дать ему элементарные *практические* советы. Однако индийские коллеги, рассказавшие мне эту историю, и тактично избегая обсуждения английских нравов, связывали причину смерти Рамануджана с индийскими обычаями, по которым его жена осталась в Мадрасе, а не поехала с ним: ведь она должна была заботиться там о своей свекрови, матери Рамануджана, эта обязанность важнее, чем забота о муже! С тех пор индусские студенты в Кембридже передают друг другу, как надо расстилать постель, и больше уже не замерзают. Странно, правда, что, несмотря на эти одеяла, вклад Рамануджана в математику остался непревзойдённым: его имя стоит рядом с именами Абеля и Галуа.

Один из самых знаменитых результатов Рамануджана связывает не вычислимые по отдельности (даже через числа  $\pi$  и  $e$ ) слагаемые

$$A = 1 + \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \dots$$

$$B = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{2}{1 + \frac{3}{1 + \dots}}}}$$

удивительной формулой для их суммы:

$$A + B = \sqrt{\pi e / 2}$$

Вот пример удивительных открытий Рамануджана, его теоремы о делимости чисел разбиений.

Для любого натурального числа  $n$  обозначим через  $p(n)$  число различных разбиений числа  $n$  на натуральные слагаемые.

Например,  $p(3) = 3$ , как это показывают три разбиения (других нет):

$$3 = 3, 3 = 2 + 1, 3 = 1 + 1 + 1.$$

Числа разбиений при  $n = 1, 2, 3, \dots$  образуют последовательность

$$p(n) = 1, 2, 3, 5, 10, 15, 22, 30, 42, 56, 77, 101, 135, 176, \dots$$

которая много изучалась, начиная с Эйлера, связавшего её с теорией степенных рядов и градуированных колец в своём «Введении в анализ». Рост этой последовательности при больших  $n$  описывается асимптотической формулой Харди – Рамануджана – Радемахера

$$p(n) \approx \frac{1}{4n\sqrt{3}} e^{\pi\sqrt{2n/3}}$$

Согласно майору британской артиллерии МакМагону,  $p(200) = 3\,972\,999\,029\,388$ . (Это число можно вычислить по дающему большую точность приближению в правой части формулы.)

В этой формуле всё удивительно: в левой части стоит целое число чисто комбинаторного происхождения, задающее, сколькими способами можно разбить  $n$  на слагаемые. В правой части стоит комбинация экспоненциальной и коренных функций, в которой вдобавок участвуют иррациональные числа:  $\pi = 3,14$  (задающее отношение длины окружности к её диаметру) и число Эйлера  $e =$

2,718 (являющееся основой всего математического анализа).

То, что левая часть с большой точностью вычисляется по такой формуле, это совершенно удивительное открытие, где ярко проявляется фундаментальное единство всех частей математической науки: алгебры, геометрии, анализа, комбинаторики, теории вероятностей и техники приближенных вычислений.

Открытия Рамануджана делимости чисел разбиений состоят, например, в следующем:

числа  $p(5n + 4)$  [это 5, 30, 135, ...] делятся на 5.

Математика — экспериментальная наука, и свои открытия Рамануджан сделал, экспериментируя с приведённой выше последовательностью. Восхищаясь его гением, я всё же больше люблю чем-то более близких мне Абеля и Литлвуда. Доказательство Абеля неразрешимости в радикалах алгебраических уравнений степени 5 и выше я в 1963 г перевёл на топологический язык теории римановых поверхностей и групп-монодромий накрытий, и это доказательство я рассказал тогда московским школьникам, и один из них впоследствии издал это доказательство в виде книжки (В. Б. Алексеев «Теорема Абеля в задачах и решениях». М., Наука, 1976). Поэтому в 2001 г. один талантливый польский математик (долго обучавшийся в Москве) опубликовал по-английски своё «новое топологическое доказательство теоремы Абеля» в журнале «Топологические методы в нелинейном анализе».

### **Отлёт саранчи и отселение оленей**

Экология и экологи давно уже начали исследование того, как решают мальтузианскую проблему животные различных видов. Было обнаружено, что ещё до того, как положение с пищей становится катастрофическим, наблюдается на первый взгляд странное поведение (вроде похода грызунов к морю, где они и утопают), целесообразное не для отдельной особи, но лишь для сохранения вида. К сожалению, я забыл имена авторов открытий, о которых прочитал в одном из московских научно-популярных журналов (не помню даже, была ли это «Наука и жизнь», «Знание — сила», «Техника — молодежи», «Природа» или «Химия и жизнь»).

Первый случай — отлёт саранчи, порой за тысячи километров.

Поразительно здесь то, что улетают не те особи, которые увидели, что их стало слишком много на ближнем поле, а лишь их дети. При этом даже и не обязательно, чтобы их действительно стало много. Можно просто расставить по полю уголки отражатели, как на аэродроме, отражающие зеркальный образ зрителя, с какой бы стороны он ни подошел. Тогда саранча примет свои собственные многочисленные отражения за соседних родственников. И в результате следующее поколение, дети, улетят.

Как именно родители передают детям знание о том, что надо улетать, неясно, но уж не речью и не показом. По-видимому, передача происходит химическим путем. Возможно даже, что достаточно накормить молодёжь особями, видевшими многочисленных «соседей», тогда молодёжь захочет улететь, соберется в стаю и улетит.

Второй пример – олени. Когда в лесу их становится слишком много, они делятся на две группы. Первая группа, более настырные особи, захватывают лучшие уголья, где хватит пищи и им, и их потомкам. Вторая группа, менее настырные, уходят на неудобные пастбища и там ведут тихую и мирную жизнь. По-видимому, они играют в весёлые игры, перепрыгивают друг через друга, занимаются наукой и философией, поют и сочиняют стихи, на вид они совершенно счастливы, и самое главное отличие от настырных их родственников состоит в том, что они вовсе не размножаются и не приносят потомства. В результате еды для всех хватает и олений род в лесу сохраняется.

## **За клюквой**

Мало кто знает подмосковные клюквенные болота, но я давно отыскал их и практически каждую осень набираю ведро – другое клюквы километрах в десяти от дома, среди сосновых лесов междуречья Истры и Москвы-реки. Последнее время поблизости появились дачные поселки, да и поляны внутри леса начали застраиваться; думаю, что это преступление против лесоохранных законов, но члена соседнего сельсовета, пытавшегося протестовать, недавно застрелили подъехавшие на машине заинтересованные граждане. Новые жители, кажется, не разбираются, в дарах леса,

так что мои соперники на грибных и ягодных местах давно уже знакомые мне крестьяне соседних деревень.

Недавно меня поразили на большом клюквенном болоте две молодые девушки, видимо сменившие своих матерей: они пришли с маленькими скамеечками, уселись на сфагновом поле и стали в нём рыться со страшной скоростью, вытаскивая ягоды клюквы с глубины сантиметров двадцать и, пожалуй, обгоняя меня. Впрочем, вскоре собирательницы эти встретились с естественным затруднением: на болоте от воды тянет холодом (в середине поляны есть даже чёрное озеро, где я всегда купаюсь, пока оно не замёрзнет вконец). Чтобы отдать долг природе, девушки, не обращая на меня внимания (или не заметив, до меня было метров пятьдесят), не прекращая быстро собирать клюкву, спустили свои джинсы, облегчились, подобно коровам, и продолжили работу.

В этот день я перешёл на меньшее соседнее болото, где никого уже не встретил. Кроме клюквы, по краю этого болота я собирал столько белых грибов, что перевозка всего этого урожая домой на велосипеде стала затруднительной. Хотя эти замечательные леса стали теперь (кажется, впервые после Петра I) вырубать, они всё ещё полны соковищ.

### **Томография мозга, геометрия и алгебра**

За последние десятилетия в изучении работы мозга произошел кардинальный сдвиг. Компьютерная томография позволяет следить за активностью разных частей мозга при выполнении разных заданий с миллисекундной точностью, и механизмы, о которых можно было только догадываться, теперь изучены детально.

Вот несколько ярких открытий, о которых легко рассказать неспециалисту. Оказывается, мужской и женский мозг анатомически различны с рождения (это статистика: у некоторых женщин мозг скорее мужской). Например, часть мозга, отвечающая за умножение многозначных чисел, у женщин, в среднем, в несколько раз больше и сильнее, чем у мужчин. Напротив, пространственное ориентирование (будь то в лесу или в городе) легче даётся мужчинам, опять-таки по анатомическим причинам.

У женщин, как правило, более развито мозолистое тело,

осуществляющее связи между левым и правым полушариями мозга. Поэтому они используют обычно оба полушария: и левое, склонное к логике и к последовательным действиям, и правое, ответственное за пространственную ориентировку и за эмоции. Напротив, из мужчин большинство либо левополушарны, либо правополушарны, и склонны заменять своё менее привычное к работе полушарие более привычным: одни решают геометрические задачи алгебраически (как Декарт, изгнавший чертежи из геометрии), а другие применяют геометрию для решения алгебраических задач (как Ж.-Ж. Руссо, который говорит в «Исповеди», что не мог поверить выведенной им самим формуле «квадрат суммы равен сумме квадратов слагаемых с удвоенным их произведением», пока не нарисовал чертёж).

С точки зрения математика томография это приложение теории рядов Фурье в медицине. Даже такой тонкий факт этой теории, как так называемое «явление Гиббса» (отличие предела графиков частичных сумм ряда от графика предела этих сумм) виден на томограмме в качестве артефакта: внутри изображения органа появляются дополнительные линии, которых в реальном органе нет. А именно, такими линиями являются прямые, касающиеся границ изображений костей либо в двух точках, либо в одной точке перегиба границы изображения, где выпуклость сменяется вогнутостью. Не зная явления Гиббса, можно начать лечить несуществующую болезнь.

### **Несъедобные зайцы**

Абстрактная идея числа (безотносительно к тому, что именно считается) неочевидна, и абстрактные числа имеются не во всех языках. Например, по-японски употребляются разные числительные, в зависимости от того, стоят считанные объекты или лежат, съедобны ли они и т. п. По-русски тоже есть счет «один, два, три...» и есть «раз, два, три...», не вполне взаимозаменяемые.

Несколько лет назад японцам пришлось столкнуться с неудобством различных числительных в законодательстве. Дело в том, что во время дебатов о продовольственной проблеме один из депутатов обратил внимание собрания на то, что по японским



горам бегают зайцы, прекрасная, но не используемая населением пища. Беда оказалась связанной с тем, что зайцы считаются числительными, означающими несъедобные предметы, потому зайцев и не едят. Была создана комиссия по решению проблемы. Она через небольшое время предложила законопроект, который был принят и решил проблему. Новый закон гласит «заяц – птица».

Библия запрещает есть зайцев с удивительной формулировкой: «Только сих не ешьте из жующих жвачку и имеющих раздвоенные копыта: ... зайца, потому что он жуёт жвачку, но копыта его не раздвоенны» (Левит, 11, 6).

### **Аксиньинское кладбище**

Шестилетний племянник Саня всегда желал вести светские беседы. По утрам он приезжал ко мне на дачу на велосипеде и спрашивал: «Ты любишь природу?» На вопрос, что он имеет в виду, ему приходилось мне объяснять: «Ну, море, океаны, птиц, рыб, леса, разных животных...». Когда я признавался, что люблю, следовал роковой вопрос: «Ну, тогда ты, наверное, можешь мне помочь: чем питаются сколопендры?» Однажды, желая спастись от сколопендр, я предложил поехать в лес на велосипедах, и мы направились к деревне Аксиньино. Посреди этой деревни стояла старая церковь, используемая как склад муки или зерна. Проехав через большую лужу, располагавшуюся на нашем пути посреди деревни перед церковью, я обернулся и увидел среди лужи упавшего Саню, а сверху его велосипед. Бабы, шедшие со склада с мешками, чуть не попадали от смеха, мешки, во всяком случае, они сбросили.

«Они надо мной издеваются, а я именно это ненавижу», сказал Саня, и мы поехали к кладбищу, взбиравшемуся на холм, за которым начинался лес. Но тут я увидел на кладбище две разрытые могилы и предупредил Саню, что будут похороны, и что нам предстоит пройти, мимо разрытых могил: «А это, если у кого много грехов, опасно, черти могут через могилу утащить в ад». Тогда Саня попросил дать ему сперва немного подумать. Через несколько минут он решил: «Пойдём!» Мы благополучно прошли всё кладбище. Погода портилась. Спускались чёрные тучи, дул ветер, падали первые капли дождя, вдоль поля навстречу шёл

странный чёрный человек с чёрным зонтом, но и он ничего плохого не сделал. «Вот видишь, сказал я Сане, не такие уж у тебя страшные грехи».

«Неужели ты мог подумать, что я за себя боялся?»

\* Шварц описывает жестокую борьбу между Житковым и Маршаком за первенство в издаваемом всеми ими детском журнале: ежедневно приходилось решать, кому заказывать рисунки, Бианки или Ватагину, Чарушину или Конашевичу, и никто не хотел уступить.

Дедал, великий архитектор и изобретатель древности, прославлен тремя изобретениями.

Он построил для Пасифаи, жены критского царя Миноса, деревянную корову, благодаря которой та родила получеловека-полубыка Минотавра, обманув возлюбленного ею быка.

По поручению царя Миноса, Дедал построил для Минотавра дворец-лабиринт, где тот убивал привозимых ему греческих молодых людей.

В конце концов Дедал сбежал от этих занятий, построив для себя и своего сына Икара самолёты (но Икар, не послушав совета отца, залетел слишком близко к Солнцу, от чего клей растопился, крылья отвалились, и Икар упал и разбился). Минос впоследствии пытался вернуть Дедала и нашёл его в Сицилии, но Дедал тут перехитрил его.

Сегодня слово «дедал» по-французски употребляется как синоним слова лабиринт.

Эта брошюра не была подготовлена к печати. Она явно предназначалась для широкого круга читателей, но в ней есть и самая серьёзная математика. В отрывке *Анна Ярославна* ошибочно указано, что убежище искала английская королева, на самом же деле, Иван Грозный. В отрывке *Происхождение математики* содержится неверное утверждение о том, что во времена Колумба существовало совершенно неверное представление о размере сферической Земли.

Автор дополнил свой текст подстрочными примечаниями. Каждый, кто пытался скопировать полный текст такого автора, должен был преодолеть громадные трудности. Пришлось испытать их и мне

## II

Л. В. Некраш

### Теория статистики и теория вероятностей

*Вестник Ленинградск. Унив.*, № 2, 1947, с. 61 – 7

Статья представляет собой вступительный очерк из подготавливаемой нами работы *Система признаков и система средних* [которая вряд ли вышла в свет. О. Ш.].

Ни одна из работ в области теории статистики не может обойтись без постановки вопроса о соотношении, которое должно существовать между теорией статистики и теорией вероятностей. Со времён Кетле судьбы этих двух наук настолько тесно сплелись, что всякое прикосновение теории статистики неминуемо задевает проблемы её соотношения с теорией вероятностей. Это особенно сильно чувствуется при любых попытках затронуть вопросы теории средних<sup>1</sup>, в отношении которой считается почти аксиомой, что применение средних и их научное осмысливание немислимо вне теории вероятностей, и в частности вне её теорем, известных под общим наименованием *закона больших чисел*. Так, например, попытка проф. В. И. Романовского эмансипироваться (!) в одной из его работ (1924) от теории вероятностей квалифицировалось в своё время как *принципиальное отступление от завоёванных статистикой позиций* (Слущкий 1925, с. 104).

Конечно, дело здесь не в оценке самой попытки Романовского. Она могла быть и неудачной, но в суровом отношении к принципиальной стороне этой попытки. Между тем, почти все показатели теоретической статистики могут быть в конечном счёте представлены как те или иные

средние. Следовательно, то или иное столкновение с теорией вероятностей при обосновании средних неминуемо превращается в столкновение с теорией вероятностей по всему фронту теоретической статистики. Это в достаточной мере объясняет появление настоящей статьи и до известной степени предопределяет её структуру.

В первую очередь надлежит рассмотреть, может ли вообще теория вероятностей быть увязана с проблемами теоретической статистики, и, в утвердительном случае, по какой именно линии. Затем будет далеко не лишним проверить прочность той связи теории вероятностей с теорией средних, которая так часто и уверенно декларируется.

Итак, ныне по вопросу об отношении статистики к теории вероятностей почти безраздельно господствует та точка зрения, согласно которой научная теория статистики мыслима лишь как вероятностная теория статистики. В связи с этим, одни видят в теории вероятностей базу статистической теории, другие отождествляют теорию статистики с прикладной теорией вероятностей, третьи проводят грань между теорией статистики и математической статистикой и опирают на теорию вероятностей лишь последнюю. Поскольку в последнем случае между указанными дисциплинами отчётливой грани не проводится, а к теории статистики обычно относятся разделы статистической науки, не требующие применения математики.

Эту последнюю точку зрения можно рассматривать как компромиссный и смягчённый вариант господствующих воззрений. Образцов соответствующих высказываний можно указать сколько угодно. Ограничимся лишь некоторыми. Учёный с мировым именем, проф. А. А. Чупров, скончавшийся в 1926 г., вводит в обращение термин *стохастическая теория статистики*, и в своей

вступительной речи, произнесённой при защите своей диссертации в Московском университете 2 декабря 1909 г. [этот ещё не созревший учёный], указывал:

*В понятии объективной математической вероятности мы находим ключ к уразумению внутреннего смысла того учёта частоты событий, к которому прямо или косвенно (через посредство так называемых математических ожиданий) сводятся в своём существе приёмы статистическо-номографической работы: закон больших чисел, связывающий объективные вероятности событий с их статистическим частотами, является в своих многообразных математических облачениях их общей, не всегда лишь сознаваемой основой. (1910, с. 7.)*

Пятнадцать лет спустя, говоря о путях научного обоснования практически применяемых обобщающих показателей, Чупров (1924, с. 6) писал:

*Всё прочнее укореняется убеждение, что ответа надо искать в теории вероятностей, что там лишь можно почерпнуть обоснование для приёмов исследования, стремящихся преодолеть ту своеобразную ненадёжность наиточнейших статистических подсчётов, с которой связывается представление о случайном характере их итогов.*

В своём курсе теории вероятностей С. Н. Бернштейн (1927, с. 3) говорит о целях прикладной теории вероятностей, или статистики, а В. Романовский (1938, с. 7 и 12) наряду с частными, конкретными статистиками звёздной, медицинской, ..., которые занимаются изучением соответствующих конкретных коллективов, вводит понятие теоретической статистики, определяя его как изучение абстрактных статистических коллективов при помощи математических методов, и носит название математической статистики. часто называемой и

теоретической.

И далее, через страницу:

*Теоретической статистикой мы будем называть ту часть математической статистики, которая разрешает нормативные статистические задачи при помощи теории вероятностей.*

Один из учеников Чупрова, О. Н. Андерсон, указал на трудность проведения границы между общей теорией статистики и математической статистикой:

*Könnte man sich darauf einigen, mit der Benennung mathematische Statistik jene Teile der statistischen Theorie zu bezeichnen, die im engen Zusammenhange mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung stehen und beinahe als angewandte Wahrscheinlichkeitsrechnung angesehen werden können.*

Можно был бы согласиться в том, чтобы термином *математическая статистика* обозначать те части статистической теории, которая находится в тесной связи с исчислением вероятностей и почти могла бы рассматриваться в качестве прикладного исчисления вероятностей. (*Einführung in die mathematische Statistik*. Wien, 1935, p. 2).

Любой из указанных вариантов взгляда на соотношение теории статистики и теорией вероятностей неизбежно приводит к отрицанию единства в статистической науке и к её расчленению на не связанные и неравноценные в научном отношении части. Чтобы доказать это, рассмотрим, например, наиболее крайнюю точку зрения: статистическая наука сводится к прикладной теории вероятностей. Но это положение сразу же определяет и границы первой. Ведь совершенно очевидно, что вся область практической деятельности, связанная с проблемами статистического наблюдения, как ограничение сферы наблюдения в пространстве и времени и т. п., а также теория и практика группировки, не подлежат вероятностной трактовке.

Здесь перед нами не открывается широкого поля разнообразных, одинаково осуществимых возможностей. Наша деятельность в этих областях определяется не *случаем*,

а весьма продуманными и сознательными мотивами. С другой стороны, при принятии указанного выше взгляда на соотношение статистической науки и теории вероятностей из поля зрения статистической науки выпадают и такие теоретические разделы как учение о статистической совокупности. Необходимость в этом понятии по существу отпадает. Вместо него появляется понятие массы или множества явлений, обладающих одним или несколькими общими признаками, да и то не обязательно.

Можно перелистать ряд работ по теории вероятностей и убедиться в том, что она может великолепно обходиться без этого понятия, а различные работы по *теоретической* или *математической* статистике, если и употребляют это понятие, то вкладывают в него указанное выше и чисто формалистическое понимание, ничего общего не имеющее с понятием совокупности в советской статистике [у советских авторов], см., например, В. Романовский *Математическая статистика* (1938, с. 5).

Несколько смягчённый вариант взгляда на роль теории вероятностей, трактующий её как *базу* статистической науки, сохраняет лишние статистической науке её единства. На самом деле, как понимать утверждение о базе? Только так, что наукой теория статистики становится лишь тогда и постольку, поскольку она опирается на теорию вероятностей. А это возможно лишь в круге тех вопросов, в которых опять-таки на первый план выступает *случай*, и мы снова возвращаемся к сделанному ранее выводу.

Наконец, последний вариант, отводящий теории вероятностей определённую область, *ту часть математической статистики, которая разрешает нормативные статистические задачи при помощи теории вероятностей* (см. выше). По существу он провозглашает расчленение статистической науки на два раздела, на математическую и нематематическую статистику. Само

собой разумеется, что последняя по существу выносится за скобки статистической науки, что действительно можно видеть по содержанию различных работ по теоретической статистике.

Не может считаться случайным, что за последнюю четверть века среди зарубежных работ из области статистической науки крайне редко можно натолкнуться на такую, в которой хотя бы вкратце рассматривались проблемы статистического наблюдения и группировок или общие методологические вопросы нашей науки, если не считать рассуждений о роли и значении теории вероятностей.

Вот первые попавшиеся под руку работ за 1923 – 1945 гг.: **Келли**, *Статистический метод*, 1923; хорошо известный русскому статистику учебник **Миллс**, *Статистические методы в применении к экономике и предпринимательства*, 1925; **Р. А. Фишер**, *Статистические методы для исследователей*, 1925; **Юл**, *Введение в теорию статистики*, 11-е издание, коренным образом переработанное в сотрудничестве с **М. Кендаллом**; **Л. Берновилль**, *Введение в статистический анализ*, 1939; **А. Воф**, *Элементы статистического метода*, 1943; **М. Кендалл**, *Теория статистики повышенного типа*, 1945. Только в уже сравнительно устаревшей работе хорошо известного русским статистикам **А. Боули**, *Элементы статистики*, 1945, и в небольшом, но умело составленном руководстве **В. Кинга** *Элементы статистического метода*, 1945 уделяется некоторое, довольно скромное место проблемам группировок (Боули), группировок и наблюдения (Кинг).

Нельзя не связать эти факты с вероятностной трактовкой статистической науки. Во всяком случае, прогрессивным явлением этот факт нельзя считать, как потому, что вероятностное обоснование статистической науки ещё не перестало быть спорным, так и потому, что статистическая наука при подобной трактовке теряет свой целостный



характер, формализуется и нередко вступает в явный конфликт с материалистической диалектикой, как это будет показано позднее.

Указанные оттенки в основном положении о тесной зависимости статистической науки от теории вероятностей заставляют несколько насторожиться. Так ли бесспорно положение о ведущей роли теории вероятностей для статистики, если для сохранения его в целостности и неприкосновенности приходится статистическую теорию дробить на два раздела, общую теорию и математическую статистику, если для оправдания такого расчленения приходится выдвигать положение о конкретных и абстрактных статистических коллективах как предметах статистики и теории вероятностей. В то же время совершенно несомненно, что иногда математическая статистика превращается в чисто формалистическое учение, абсолютно оторванное от конкретной действительности.

Это обстоятельство начинает смущать даже сторонников математической статистики. Упомянувшийся О. Н. Андерсон, желая, по-видимому, заранее снять с себя возможные обвинения в формализме, предпосылает своей книге [три эпиграфа] крупнейших представителей буржуазной статистической науки [т. е. не обязанных быть марксистами]. Эти высказывания настолько сочны и красочны, что трудно удержаться от их приведения. Вот они.

*Die mathematische Statistik ist kein Automat, in den man nur das Material hineinzustecken hat, um nach einigen mechanischen Manipulationen das Resultat wie in einer Rechenmaschine abzulesen. Es ist nicht immer sicher dass man in dieser Weise die richtige Antwort auf die gestellte Frage erhält.*

Математическая статистика не представляет собой какого-то автомата, в который достаточно лишь заложить статистический материал, чтобы в результате нескольких манипуляций, как на счётной машине, получить готовый результат. Не всегда верно, что подобным образом можно

получить правильный ответ на поставленный вопрос.

Это – крупнейший современный статистик С. V. L. Charlier. Его категоричность, правда, несколько смягчается последней фразой, которая допускает получение правильных ответов и чисто механическим путём.

Другое высказывание принадлежит известному современному английскому статистику [явно недостаточная характеристика]

R. A. Fisher:

*Little experience is sufficient to show that the traditional machinery of statistical process is wholly unsuited to the needs of practical researches. Not only does it take a cannon to shoot a sparrow, but it misses the sparrow.*

Небольшого опыта достаточно для того, чтобы показать, что традиционные манипуляции статистического исследования совершенно не подходят потребностям практических изысканий. Он и не только является выстрелом из пушки по воробью, но и выстрелом, который в воробья не попадает.

Наконец, совсем лаконично, но решительно звучит призыв нашего соотечественника А. А. Чупрова, хоть редко кто-либо другой так много сделал для превращения статистической науки в вероятностную теорию статистики (1922/1960, с. 416):

*Математиков, играющих в статистику, могут победить лишь статистики, вооружённые математикой.*

Всё это убедительно показывает, что отношения между статистической наукой и теорией вероятностей ещё окончательно не определились. Обсуждение этой темы современной наукой далеко ещё не снято с повестки дня, как это произошло в своё время с вопросами и предложениями о проблеме перпетуум мобиле или квадратуры круга. К этой теме возвращается, например, Андерсон в указанной книге. Сущность его рассуждений сводится к тому, что в статистике, несмотря на её *идиографический* характер, возникает ряд проблем *номографического* порядка, при постановке и

решении которого необходимо опираться на теорию вероятностей. Он выдвигает идею о том, что, наряду со статистическими конкретными и строго ограниченными совокупностями *низшего порядка*, существуют совокупности *высшего порядка*, частями которых являются первые. Отсюда следует разрешаемый с помощью исчисления вероятностей переход от характеристик первых к характеристикам вторых:

*Derartige Problemstellungen und überhaupt des Schließen an Hand gegebener Gesamtheiten über gewisse Eigenschaften irgendwelcher Gesamtheiten höheren Ordnung ist für mathematische Statistik besonders typisch, und zwar liegt gerade hier die Brücke, die mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung verbindet.*

Подобные постановки проблемы и вообще практика заключения об известных особенностях совокупностей более высокого порядка на основе имеющихся под рукой совокупностей особо типичны для математической статистике. Именно здесь находится мост, связывающий её с теорией вероятностей.

Указывая затем, что теория вероятностей находит приложение при изучении распределения вариаций признака и при исследовании причинных связей для совокупностей, Андерсон всё же вынужден признать, что положения классической теории вероятностей не всегда удовлетворяют статистика. Заметив, что то или иное обоснование главных понятий теории вероятностей не затрагивает всего её математического здания, Андерсон пишет:

*Hieraus folgt unseres Erachtens, das wenigsten in der Laplaceschen und der v. Kriesschen Theorie der Wahrscheinlichkeits-rechnung und gewisses Missverhältnis besteht zwischen dem mathematisch zu engen Fundament der Grundbegriffe und dem stolzen mathematischen Bau, der auf ihm ausgeführt ist.*

Отсюда по нашему мнению следует, что по крайней мере в лапласовской и крисовской теориях исчисления вероятностей существует известное несоответствие между слишком узким математическим фундаментом основных понятий и горделивым математическим зданием,

которое на нём воздвигнуто.

Считая неизбежной опорой на теорию вероятностей, Андерсон определяет вероятность как частоту, которая устанавливается в совокупностях высшего порядка. Он предлагает переименовать ту теорию вероятностей, которой пользуется математическая статистика, в *статистическое исчисление вероятностей*. Вот его формулировка:

*Wahrscheinlichkeit eines Merkmales im Bereiche einer statistischen Gesamtheit ist seine Häufigkeit in einer anderen Gesamtheit höheren Ordnung, aus der die gegebene entstanden ist. Ihr Entstehungsweg ist für die praktischen Anwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie genauer zu präzisieren.*

*Um uns jedoch nicht zu sehr von der sonst üblichen Sprechweise zu entfernen wollen wir im weiteren die auf die Bedürfnisse der mathematischen Statistik zugestutzte Wahrscheinlichkeitsrechnung einfach als statistische Wahrscheinlichkeitsrechnung bezeichnen.*

Вероятность признака в пределах статистической совокупности есть его частота в той другой совокупности высшего порядка, из которой возникла данная. Для практического применения теории вероятностей необходимо детальнее уточнить способ возникновения совокупности.

Однако, для того, чтобы не слишком далеко отойти от обычного словоупотребления, мы в дальнейшем будем называть исчисление вероятностей, рассчитанное на потребности математической статистики, просто статистическим исчислением вероятностей.

Это высказывание примечательно и в другом отношении. Оказывается, что не только допустимо поднимать старый вопрос о соотношении статистической науки и теории вероятностей, но и заключить, что может существовать несколько теорий вероятностей, что не статистика опирается на теорию вероятностей, а напротив, теория вероятностей на статистику. Это не оговорка, вот следующее высказывание:

*Desgleichen lassen wir auch die Frage ganz unberührt, welche Wahrscheinlichkeitsdefinition im Bereiche jener, deren Arbeitsgebiet mehr außerhalb des Problemkreises der mathematischen Statistik liegt. Um jeglichem Missverständnis*

*vorzubegen, wäre es daher vielleicht angemessener, in Bezug auf die Theoreme der mathematischen Statistik ... überhaupt nicht von Wahrscheinlichkeitsrechnung zu sprechen, sondern für diese eine andere Bezeichnung zu wählen. ... Statistische Gesamtheitenrechnung, statistische Mengenrechnung oder statistische Kollektivrechnung.*

Равным образом мы совершенно не касаемся вопроса о том, какое определение вероятности будет более необходимым в других науках и, в особенности, тех, предмет которых лежит вне круга проблем математической статистики. Для предупреждения возможных недоразумений было бы поэтому может быть правильнее вообще не говорить об исчислении вероятностей в отношении теорем математической статистики и избрать для этих случаев другое обозначение; статистическое исчисление совокупностей или множеств или коллективов.

Известно, что ни один представитель статистической науки, даже из противников статистической теории статистики, не оспаривает того, что теория выборочного наблюдения с полным основанием и вполне законно строится на вероятностной базе. Поэтому высказывания Андерсона о совокупностях высшего порядка, для которых конкретные статистические совокупности *нижшего* *рядка* являются просто случайными выборками, становятся вполне понятными. Можно без особой натяжки оправдать привлечение теории вероятностей как базы статистической науки, но в то же время указывать на некоторое неблагоприятие у господствующей точки зрения. Не нужно было бы звать на помощь выборочное наблюдение, если бы статистическая теория органически вытекала из теории вероятностей, не нужно было бы совершать некоторое насилие над действительностью и мыслить гипотетические совокупности высшего порядка совокупностями безгранично большего объёма, и, в большинстве случаев, как совокупности с нормальным распределением входящих в него единиц.

Несомненно также, что представление о выборке

случайного характера, дающей жизнь конкретной статистической совокупности, равным образом является гипотезой, притом весьма натянутой. При самой лёгкой неосторожности она может подвести к представлению о демиурге, который осуществляет эту выборку. Само представление о супер-совокупности безгранично большого объёма реакционно, так как его естественным следствием является отрицание развития и динамики. Такая гипотеза биолога или агронома имеет ещё некоторое оправдание, потому что статистики этих специальностей имеют дело с реально существующем в огромных количествах клетках, бактериях, семенах и т. д. Имеющийся у них материал действительно представляет собой ничтожно малую долю того, что находится в природе.

Но для статистика-экономиста или общественника подобное представление недопустимо. В этих случаях говорить о безгранично больших совокупностях как первоисточниках конкретных совокупностей можно было бы лишь в предположении, что они включают не только единицы, существующие на какой-то данный момент, но и существовавшие в прошлом и имеющие существовать в будущем. Это означало бы исчезновение совокупности вообще ввиду отпадения её качественной основы. Если супер-совокупность – представительница всех возможных случаев и всех возможных вариаций, то существующие различия отдельных выборок из неё не могут быть существенными, а потому конкретные совокупности должны представляться в своих характеристиках абсолютно устойчивыми.

Эти выводы в отношении совокупностей из области общественных и экономических наук, имеют, однако, общее значение. Понятие совокупностей высшего порядка противоречит основным положениям материалистической диалектики, не научно, а потому и методы работы,

основанные на этом представлении, несмотря на свою кажущуюся научность, являются чисто эмпирическими, которые могут оправдывать себя лишь на узких участках и временно. Кстати, конструкция Андерсона примерно 1934 – 1935 гг. не оригинальна, её высказал английский статистик Рональд Фишер. В своей книге (1925) он писал:

*Идея совокупности бесконечно большого объёма, представленной вариационным рядом в отношении одного или нескольких признаков, является основой для всякой статистической работы.*

The idea of an infinite population distributed in a frequency distribution in respect of one or more characters is fundamental in all statistical work. Fisher (1925, p. 43).

Но, несмотря на некоторые разногласия о соотношении статистической науки и теории вероятностей, и на некоторые попытки прочнее обосновать теорию вероятностей как базы статистической науки, их связь в этом отношении признаётся несомненной. Это нельзя упрощённо объяснять лишь научной косностью, верностью традициям кетлетизма, хотя бы значительно подправленного. Два обстоятельства немало способствуют живучести и прочности этих воззрений. Первое сводится к тому, что в теории вероятностей усматривают механизм для раскрытия *законов случая*, что её предметом считают *случайные* явления. Но один из самых основных свойств статистического признака является его варьирование для отдельных единиц совокупности, которое также признаётся *случайным*. Естественно, что статистическая практика получения и обработки материала рассматривается как конкретное использование положений теории вероятностей.

Второе обстоятельство: использование теории вероятностей в практической жизни часто приносит несомненную пользу, так что её построения как бы оправданы и доказаны практикой. Для иллюстрации обычно ссылаются на практику страховых расчётов, теснейше

связанную с исчислением вероятностей. Об этом упоминал Маркс (1937, с. 194):

*Жизнь каждого человека ежедневно убывает на 24 часа. Но на человеке не написано, сколько дней его жизни уже убыло. Однако, это не препятствует обществам страхования жизни делать очень верные и очень выгодные выводы из средней продолжительности жизни.*

Возвратимся к прежнему доводу в пользу теории вероятностей как базы статистической науки. Понятие законов случая объективно связано с противопоставлением случайного и необходимого, или, в лучшем случае, с представлением о случайности как о чём-то не поддающемся предвидению ввиду бесконечной причинной цепи, вследствие незнания причин, вызывающих случайное явление. Французский математик Эмиль Борель, который особенно охотно оперирует понятием законы случая, даёт понятию случай почти все указанные определения.

*Сущность явлений, называемых нами случайными, заключается в их зависимости от причин, слишком сложных для того, чтобы мы могли их все выявить и изучить,* пишет он на первых же страницах своей книги (1923, с. 5):

*Случай только название для нашего неведения. Для всеведущего существа случая не существовало бы. ... Наука и теория вероятностей созданы людьми не для такого существа, а для самих людей, далёких от всеведения. Каковы бы ни были успехи человеческих знаний, всегда остаётся место для неведения и, следовательно, для случая и вероятности (там же, с. 9).*

*Её [теории вероятностей] цель – достигнуть возможности предвидеть явления почти с абсолютной, насколько это достижимо для человека, достоверностью, так, чтобы вероятность их наступления граничила с достоверностью (с. 11).*



*Человеческая необходимость естественных законов есть отправная точка всякого научного мышления. Этот принцип так очевиден, что считается излишним повторять его в каждой научной работе. Точно так же и я мог бы его подразумевать. Но я этого не сделал, потому что случай, предмет этой книги, противопоставляется именно понятию закона (с. 5).*

Противопоставление *естественных* и *статистических* законов, последовательно проводимое Борелем, заставляет его трактовать вероятность как числовую характеристику, устанавливающуюся между явлениями, которые подчиняются *статистическим* законам.

Приведённых иллюстраций достаточно для показа, что при такой трактовке вопроса неизбежно базировать статистическую науку на теории вероятностей. Разумеется, рассуждения Бореля не единственны в своём роде, может быть ряд оттенков подобных утверждений, но основа у них одна: объектом статистики и теории вероятностей являются случайные явления. Поэтому последняя должна лежать в основе измерительной аппаратуры статистики.

Неудивительно поэтому, что у нас в Советском Союзе подобные, противоречащие основам диалектического материализма построения, вызвали не только настороженное, но и почти враждебное отношение к статистике как своеобразному сателлиту теории вероятностей. Вопрос о том, должна ли и может ли быть советская статистическая теория стохастической (вероятностной), приобретает особую остроту при критическом пересмотре научного багажа буржуазного общества с позиций диалектического материализма.

Противопоставление случайного и необходимого, конечно, не выдерживает никакой критики. Оно не научно, и об этом достаточно ясно и убедительно писал Энгельс в своём фрагменте *Случайность и необходимость* (1944, с. 174 – 177). Он хорошо известен всякому научному работнику, и

цитировать его нет нужды. Но нельзя не обратить внимания на то, что представление о случайном как продукте нашего неведения, как продукте сложности причинных соотношений вовсе не является *определением* случая. Это представление пытается лишь раскрыть *механизм* образования случайного события, а это не равносильно его определению. Так, описание процесса производства автомобиля не равносильно его определению, хотя и помогает уяснить его устройство и действие. Итак, в теории вероятностей и статистической науке, которая на ней покоится, сам предмет не определён. Неудивительно, что в дальнейшем вероятность трактуется как некоторое свойство явления, как некоторая нормативная величина.

Совсем иное получается, если рассматривать необходимое и случайное как диалектическое единство и определять случайное как неизбежную форму проявления необходимого, как индивидуальное проявление того или иного диалектически развивающегося процесса, который управляется той или иной определённой закономерностью. Тогда всё становится на своё место. Вместо случайного придётся говорить об изучении индивидуальных проявлений процесса, об изучении их связи (совершенно необходимой) с закономерностью процесса.

Вместо автоматически и бесконтрольно действующих *законов случая* нужно говорить об определённых закономерностях процесса и их носителях, индивидуальных явлениях. Тогда определяется сам собой и вопрос о механизме появления *случайного*: разнообразие конкретных условий развёртывания процесса объясняет неизбежность варьирования его конкретных проявлений. Вероятность становится не каким-то таинственным и мистическим свойством явления, а объективной характеристикой, которая оценивает возможность того или иного проявления процесса.

Сама *теория* вероятностей занимает своё настоящее место

*исчисления вероятностей*, которое ей отводят наиболее осторожные математики, например, Марков<sup>2</sup>. Тем самым в первом приближении, вчерне разрешается вопрос о соотношении исчисления вероятностей со статистической наукой. Последняя по возможности использует исчисление вероятностей как техническое средство оценки своих показателей, их соответствия закономерностям изучаемых процессов. Статистка интересуется только вероятностью того, что исчисляемый им показатель правильно отображает ту или иную сторону закономерности, которая управляет данным процессом.

Весь вопрос в том, всегда ли возможно такое использование теории вероятностей, а если не всегда, то где именно. Надо вспомнить, что в первоначальных и исходных построениях исчисления вероятностей, если излагать их классически, основная и определяющая закономерность процесса задана и неопределённая и очень слабо намечены те условия, в которых развёртывается сам процесс. Они определяются скорее отрицательно, а не положительно, они не должны быть плодом сознательного и направленного в определённую сторону вмешательства экспериментатора. Та же самая картина имеется и в других классических схемах теории вероятностей: при подбрасывании кости, извлечении карты из колоды или шаров из урны и в процессе выборки.

Кроме заданной основной и определяющей закономерности процесса и отрицательного определения условий его развёртывания, налицо предположение о том, что изучаемый процесс не ограничен в своих повторениях, причём его основная закономерность или остаётся неизменной, или его изменения известны экспериментатору. И почти обязательно при использовании теорем так называемого *закона больших чисел* предположение о том, что проявления процесса независимы. Требование неограниченных повторений процесса вполне оправдано: оно

исходит из неограниченности комбинаций их совместного существования и полностью вытекает из диалектического единства закона и явления. *Закон есть отражение существенного в движении универсума* (Ленин (1936, с. 148)). Это выражение является в сущности философским определением и доказательством закона больших чисел.

Таким образом, первоначальной задачей теории вероятностей является переход от *закона* к *явлению*, количественная оценка возможности того или иного проявления изучаемого процесса, характеристика явления как носителя определённой закономерности. Задача статистической науки как раз обратна: она стремится от конкретной характеристики явления перейти к характеристике его как носителя определённой закономерности, и, следовательно, к характеристике *закона*. Уже одно это обстоятельство заставляет усомниться в том, что теория вероятностей может быть базой статистической науки. Но кроме того, в огромном большинстве случаев нет основной и определяющей закономерности процесса, уверенности в неизменности этой закономерности. Напротив, имеется полная уверенность в обратном, нет неограниченности повторений процесса и их независимости друг от друга. Всё это увеличивает принципиальные трудности восприятия вероятностной теории статистики и заставляет думать, что значение теории вероятностей для статистики в основном заключается в обосновании выборочного наблюдения.

Если теперь попытаться наметить соотношение между вероятностными и статистическими характеристиками, то это легче всего сделать на примере соотношения между частотой и вероятностью. Обе характеризуют одну и ту же пропорцию, которая складывается при развёртывании того или иного процесса. Но в первом случае [следуют две головоломные фразы].

Статистические и вероятностные показатели представляют некоторое единство, аналогичное единству случайного и необходимого, но при неперемнной возможности самостоятельного расчёта вероятности, т. е. при знании закономерностей развёртывающегося процесса. Иначе нельзя подсчитать его мыслимых исходов.

Итак, опора статистической науки на теорию вероятностей по необходимости крайне ограничена. Если же идти от априорных вероятностей, то с представлением о так называемых апостериорных вероятностях, размах возможностей оказывается совершенно иным. Пример. В 1910 г. в Нью-Йорке от туберкулёза умерло 18,7:10 000 человек (Уиппл и др., с. 527; год не указан) Определить соответствующую априорную вероятность невозможно, и предполагается, что наблюденная частость, 0,00187, с очень незначительной ошибкой репрезентирует (!) априорную вероятность. Опираясь на раздел исчисления вероятностей, известный как *Определение вероятностей причин* [из устаревшего перечня глав теории вероятностей], вносят в наблюденную частость ту или иную поправку, и выправленная частость участвует теперь во всех расчётах как априорная вероятность. Эти вероятности мы называем апостериорными, хотя иногда это имя присваивается статистическим частостям. Легко представить, что с этими апостериорными вероятностями в основном и оперирует статистика. Но по отношению к ним существует известная насторожённость и недоверчивость. Ещё Д. С. Милль (1879, с. 69 – 70) писал:

*In the cast of a die the probability of ace is one-sixth, not simply because there are six possible throws, of which ace is one, and because we do not know any reason why one should turn up rather than another ... but because we do know either by reasoning or by experience, that in a hundred, or a million of throws ace is thrown in about one-sixth of that number, or once in*

*six times. ... I say, either by reasoning or by experience meaning specific experience. But in estimating probabilities it is not a matter of indifference from which of these two sources we derive our assurance. The probability of events as calculated from their mere frequency in past experience affords a less secure basis for practical guidance than their probability as deduced from an equally accurate knowledge of the frequency of occurrence of their causes.*

При бросании игральной кости вероятность появления одного очка равна одной шестой. Это не только потому, что имеется всего шесть возможностей выпадения кости, из которых только одна состоит в выпадении одного очка, и не только потому, что у нас нет оснований предпочесть какое-либо одно из выпадений другому ... но потому, что мы действительно знаем, путём либо умозаключения, путём ли опыта, что на каждую сотню или миллион бросаний одно очко выбрасывается примерно в одной шестой числа всех бросаний, т. е. один раз из шести. Я так говорю, имея в виду специальный опыт. Но при оценке вероятностей вовсе не безразлично, из которого из этих двух источников мы черпаем нашу уверенность. Вероятность событий, исчисленная лишь на основе числа их повторения в прошлом опыте, представляет менее надёжный базис для руководства на практике, чем вероятность, исчисленная на основе наших знаний такой же точности о частоте появления их причин.

Из наших современников резким противником апостериорных вероятностей является известный математик и статистик, творец дисперсионного анализа Р. А. Фишер<sup>3</sup>. В его книге (1937) один из параграфов введения характерно назван *Отказ от апостериор-ной вероятности*. Там же он предположил, что Бейес воздержался от публикации своей знаменитой теоремы о вероятностях причин ввиду недостаточной уверенности в её обоснованности. (Её опубликовал его друг, Р. Прайс в 1764 г.) Свои возражения против теоремы Бейеса и, следовательно, против апостериорных вероятностей Фишер резюмирует:

**1.** Теорема (или, как её называет Фишер, аксиома Бейеса) приводит к очевидным противоречиям. Их устранение заставляет защитников апостериорных вероятностей видеть в

них средство измерений не объективно существующих количеств, а только психологических тенденций.

2. Отсутствие у аксиомы явной очевидности для рационально мыслящего ума.

3. Крайне редкое использование понятия апостериорной вероятности для подкрепления заключений, выводимых из экспериментальных фактов.

Теорема Бейеса, которая стала яблоком раздора, сама по себе вряд ли, однако, может вызвать особые возражения. Её содержание с водится к следующему. [Следует её описание.]

Своеобразие задачи, поставленной и решавшейся Бейесом, заключается в том, что определяется вероятность не того или иного следствия развёртывающегося процесса, а пытаются по тому или иному следствию определить вероятность принадлежности этого следствия к определённой разновидности процесса. Своеобразие и трудность этой задачи легко представить по аналогии с диагностикой болезни. Любой одиночный симптом может наблюдаться при самых разнообразных заболеваниях, и по одному симптому диагноз не удастся поставить. Искусство диагноста в том и заключается, что, комбинируя ряд симптомов и учитывая условия возникновения и протекания болезненного процесса, сразу же ограничить широкий круг болезней двумя – тремя, среди которых он и выбирает.

В задаче, описанной выше, мы, наряду с *симптомом* (появлением белого шара), имели дополнительные данные: определённый круг *болезней*, среди которых был необходим диагноз, имели различные варианты испытания и соответствующие вероятности самих вариантов и появления белого шара при каждом из них. Задача Бейеса поэтому и трудна, но не безнадежна, она могла решаться по объективным данным. Позднее, однако, по мере того, как она превращалась в отыскание апостериорных вероятностей и формулировки обратной теоремы закона больших чисел

Бернулли, она безмерно расширялась и становилась задачей на диагностику заболевания при отсутствии на то достаточных объективных данных. Диагноз становился плодом субъективного усмотрения, интуитивной догадки.

Позднейшая формулировка задачи может быть изложена так. Пусть в результате  $s$  испытаний некоторое событие  $E$  появилось  $m$  раз. Вероятность этого события неизвестна. Она может принимать бесконечно большое число значений от нуля до единицы. Какова вероятность того, что значение этой неизвестной вероятности  $P_x$  заключается в некоторых пределах от  $\alpha$  до  $\beta$ ? Она определяется по формуле [неполной бета-функции].

Максимальное значение эта вероятность принимает при  $x = m/s$

После ряда преобразований значения искомой вероятности определяются обычной формулой интеграла вероятностей [нормальным распределением]. В этом и состоит обращение теоремы Бернулли [ничего подобного]. При тех же ограничениях, что и прямая теорема Бернулли, обращённая теорема таким образом утверждает, что частота события репрезентирует его вероятность и становится беспредельно близкой к последней при безграничном увеличении числа испытаний.

Несколько затянувшееся изложение теоремы Бейеса было совершенно необходимо для установления определённого отношения к апостериорным вероятностям.

Нахождение неизвестной вероятности  $x$  события  $E$  возбуждает сомнения. Во-первых, все значения  $x$  между нулём и единицей до испытания считаются равновероятными, что является чисто субъективным. Но, во-первых, событию  $E$  быть может соответствуют только определённые значения вероятностей. Во-вторых, постулированы независимость испытаний и постоянство вероятности  $x$  при их повторениях. В-третьих, отсутствует представление о процессе испытания<sup>4</sup>,



приводящем к событию  $E$ . Задание ограничительных условий теоремы для этого явно недостаточно. Неудивительно, что зачастую вероятностные характеристики событий человеческой жизни изображаются весьма упрощённо, процесс жизни уподобляется вытаскиванию жребиев из урны. В-четвёртых, не ставится вопрос о том, может ли вообще существовать вероятность как объективная оценка возможности для того процесса, который приводит к той или иной статистической частоте.

Итак, апостериорные вероятности весьма сомнительны. Это в сущности *облагороженные, типичные*, частоты. Опираясь на них статистическую теорию значит опираться статистику на самоё себя. Ведь к чему сводится опора на эти вероятности? К тому, что они предпочитают эмпирическим частотам ввиду их относительной устойчивости. Но где корни этой устойчивости? Нужен анализ конкретных материальных процессов. Учение об апостериорных вероятностях, если уж защищать его, может быть понято только при представлении вероятности как предельной частоты.

В исчислении вероятностей есть и другая сторона, особенность, которая требует от нас известной сомнительности по поводу зависимости теории статистики от исчисления вероятностей. Это проблема независимости испытаний и событий. Она особо значима при формулировке теорем закона больших чисел. Их общее содержание сводится к утверждению, что с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, можно утверждать, что при достаточно большом числе испытаний тот или иной статистический показатель (частость, средняя) будет сколь угодно мало отличаться о соответствующего вероятностного показателя (вероятности, ожидания). Но во всех формулировках закона больших чисел Бернулли (Лапласа, Пуассона, Чебышева) участвует условие независимости испытаний и событий, что сильно

препятствует практическому использованию закона. Эта ограниченность оказывает влияние и на построения в области апостериорных вероятностей.

Следует, однако, отметить, что за последние 20 – 25 лет Марков, Бернштейн и другие учёные изучали такие зависимые испытания, при которых сохраняется действие закона больших чисел. Так (Марков), он применим к таким зависимым величинам, для которых при увеличении числа испытаний стремится к нулю ожидание квадрата разности средних арифметических значений этих величин и из их ожиданий.

Этот пример наглядно показывает, что в большинстве случаев нельзя установить, применим ли к нему закон больших чисел и решить это можно только субъективно.

**Выводы:**

**1.** Статистическая наука не может и не должна считаться прикладной теорией вероятностей. Иначе, теория вероятностей не является базой этой науки.

Пояснение. **1.** *База* науки дробит её на математическую и нематематическую, лишает её единства, либо выкидывает всю теорию наблюдений, совокупности, группировок и формализует её остальные отделы. **2.** При открывающихся возможностях современную теорию вероятностей невозможно ограничивать априорными вероятностями и другими вероятностными показателями, которые считаются статистическими, но определёнными теоретически. **3.** Апостериорные вероятности вносят элементы субъективного ввиду недопустимой схематизации конкретной действительности и опоры на независимость испытаний, к тому же вероятность иначе считается непознаваемой. Этим вероятностям нельзя придавать нормативное значение. **4.** Опора на теорию вероятностей подразумевает некоторое признание независимости испытаний или, по крайней мере, их ограниченной зависимости. Действительность же не

соответствует независимым явлениям, и непонятно, возможно ли при наблюдаемой зависимости применять закон больших чисел.

3. Статистическая наука не должна отказываться от использования исчисления вероятностей, в основном в теории выборочного наблюдения, а также в отдельных случаях (расчёт вероятных (!) ошибок, изучение разностей показателей).

4. Попытка введения совокупностей высшего порядка (генеральных) неудачна и неприемлема советской статистике. Она ярко показывает кризис в проблеме соотношения теорий статистики и вероятностей. Она же косвенно признаёт особое положение теории выборочного наблюдения.

### Примечания

1. Теория средних рассматривает средние и из наблюдений, из переменных величин (например, из цен на хлеб). Неясно, как Романовский обошёлся без применения статистических методов (упомянутую автором статью Слуцкого мы не видели. Об этой теории см. нашу статью

2. Марков озаглавил каждое из нескольких литографированных изданий своих лекций *Теория вероятностей*, но все последующие типографские издания своей монографии назвал *Исчислением*. Он, вероятно, последовал примеру нескольких зарубежных авторов, в первую очередь Пуанкаре.

3. Опора только на апостериорные оценки практиковалась в раннем периоде биометрической школы, и против этого подхода восстали континентальные статистики, в первую очередь Чупров. Показателен также пример *Гарвард-ского барометра*. Так называли прогнозы экономической конъюнктуры на ближайший месяц на основании предыдущих данных, которые составляли несколько ведущих американских статистиков в Гарварде. Здесь, правда, следует говорить о пренебрежении априорными исследованиями.

Разразился кризис и началась Великая депрессия 1930х годов. Советские статистики, вооружённые марксистско-ленинскими учениями, также ничего подобного не предвидели. Исключением был будущий враг народа Н. К. Кондратьев, который, правда, назвал неверный срок кризиса.

4. Мы бы сказали; отсутствует представление об обстоятельствах

испытаний. Они, конечно же, как-то учитываются, но только пока не вмешивается идеология. Вот яркий пример стахановского движения.

Стаханов был забойщиком, вырубал уголь из пласта. Его надо было накладывать в вагонетки и откатывать к стволу шахты, крепить появляющийся туннель. Стаханов начал работать с двумя помощниками (которых никто и не вспомнил) и только вырубал уголь. Разделение труда позволило резко повысить его производительность, и *стахановское движение* оказало сильнейшее идеологическое влияние. Но общие экономические показатели не улучшились. Нужен был дополнительный крепёжный лес, вагонетки. Ствол шахты должен был справляться с дополнительной нагрузкой, дополнительный уголь надо было складировать, отправлять по железной дороге в дополнительных вагонах, а потребители должны были его использовать и отправлять потребителям свою дополнительную продукцию, которая быть может и не нужна была ... И всё это в плановом хозяйстве! Поднимай самого себя за волосы ...

## Библиография

Автор привёл лишь не систематизированные библиографические ссылки

**Бернштейн С. Н.** (1927), *Теория вероятностей* (с. 3). 4-е изд., М – Л., 1946.

**Борель Э.** (1973), *Случай*. М. – Л.

**Ленин В. И.** (1936), *Философские тетради* (с. 148).

**Романовский В. И.** (1924), *Элементарное изложение теории средних*. Ташкент.

--- (1938). *Математическая статистика*, кн. 1. Ташкент (с. 5, 7 и 12).

**Слуцкий Е. Е.** (1925), Об одном опыте построения теории средних без помощи теории вероятностей. *Вестник стат.*, янв. – март (с. 104).

**Уиппл Дж. У., Новосельский С. А.** (год не указан), *Основы демографической и санитарной статистики* (с. 527).

**Чупров А. А.** (1909). *Очерки по теории статистики*. М. Также 1910 и М., 1959 (1910, с. 7).

--- (нем., 1922), Учебники статистики. В книге автора *Вопросы статистики*. М., 1960. Ред. Н. С. Четвериков, с. 413 – 429.

--- (нем., 1924), Основные задачи стохастической теории статистики. Там же, с. 162 – 221.

**Энгельс Ф.** (1974), *Диалектика природы*. М. (с. 174–177).

**Anderson O. N.** (1935), *Einführung in die mathematische Statistik*. Wien.

**Bernonville L. D. de** (1939), *Initiation à l'analyse statistique*. Paris.

**Bowley A. L.** (1945), *Elements of statistics*. London.

- Charlier C. V.** (1920), *Vorlesungen über die Grundlage der mathematischen Statistik*. Hamburg (p. 3).
- Fisher R. A.** (1925), *Statistical methods for research workers* (p. 43). В книге автора: перепечатка трёх сочинений с отдельной пагинацией: *Stat. methods, exp. design and scient. inference*. Oxford, 1990.
- (1937), *Design of experiments*, London. 2-е издание. Там же.
- Kelley T. L.** (1923), *Statistical method*. New York.
- Kendall M. G.** (1945), *Advanced theory of statistics*. London.
- King J.** (1945), *Elements of statistical method*, New York.
- Mill J. S.** (1879), *System of logic*, vol. 2. London (pp. 69 – 70). 10-е издание.
- Mills F. C.** (1925), *Statistical method applied to economics and business*. London.
- Waugh A. E.** (1943), *Elements of statistical method*. New York – London. 2-е издание.
- Yule Udny G., M. G. Kendall** (1937), *Introduction to the theory of statistics*. London.

#### Дополнительная библиография

- Anderson O. N.** (1935), Über den Begriff der mathematischen Statistik *Ausgew. Schriften*, Bd. 2. Tübingen, 1963, pp. 945 – 952. **S, G**, 36.
- Poincaré H., Пуанкаре А.** (франц., 18986, 1907), *Теория вероятностей*. Ижевск, 1999. Название в оригинале: *Исчисление ...*
- Pearson K., Пирсон К.** (1892), *Grammar of science*. London. *Грамматика науки*. СПб, 1911.
- Колмогоров А. Н., Прохоров Ю. В.** (1974), Математическая статистика. БСЭ, 3-е изд., т. 15, с. 486 – 484.
- Шейнин О. Б., Sheynin O.** (2007), The true value of a measured constant and the theory of errors. *Historia scientiarum*, vol. 17, pp. 38 – 48. **S, G**, 47.
- (2011a), Обратный закон больших чисел. *Историко-математическое исследование*, вып. 14 (49), с. 212 – 219.
- (2011b), Случайность и необходимость. *Вопросы истории естествознания*, № 2, с. 36 – 44.
- (2019), *Теория вероятностей. Исторический очерк*. Берлин. **S, G**, 11.

#### Комментарий

Автор излагал серьёзную проблему (соотношение статистики и теории вероятностей), но то была попытка с негодными средствами. Мы не видели ни единой ссылки на его статью.

Некраш привёл ссылки на малоизвестные источники,

процитировал (и на языке оригинала, и в переводе) интересные высказывания авторитетных авторов. Но всё испортил своим явно недостаточным теоретическим багажом, полным пренебрежением современной ему отечественной литературой, какими-то нелепыми и малопонятными выражениями (хотя бы неоднократное упоминание *развёртывающегося процесса*), да и ненужным цитированием Энгельса и Ленина (не на их собрания сочинений) и настаиванием на том, что должно изложение материала возможно только на основе диалектического материализма. Будто бы Кант, например, не смог бы обойтись без этого. Некраш заявил, что ни один автор не объяснил понятия *случай* (что стало действительно изучаться примерно с 1920-х годов, но о чём он не знал). Притом, обильно цитируя Бореля, он не знал ничего о Пуанкаре, с которого и началось современное изучение случая. Случайность должна признаваться и в широком смысле, без её ограничения некоторой устойчивостью (уклонения в лестнице живых существ).

Некраш неверно представлял себе различие между математической и статистической вероятностью и ошибочно обвинил других авторов в пренебрежении исследований, как раз и занимавшимися ей проблемами. Достаточно упомянуть Гумбольдта, который ввёл изотермы в 1817 г. Не раскрыта суть ни теоремы Бейеса, ни обратного закона больших чисел, признаётся существование идиографических наук (состоящих лишь из фактов), не упомянут Мизес. Понятие Некраша о теории вероятностей устарело: он упомянул её лапласов раздел *Исследование вероятностей причин*. Он не мог знать современного определения математической статистики (Колмогоров и Прохоров, 1974).

Мы, например, описали эти проблемы, см. Дополнительную библиографию, притом в монографии 2019 г. легко воспользоваться оглавлением.

Особо заметим резкие, притом идеологически обосновываемые возражения автора против генеральных совокупностей. Они естественно вводятся современной статистикой, что, однако, не отменяет заботы об их существовании в каждом отдельном случае.

Все изложение упрощается и упорядочивается фразой Пирсона (1892), который в Советском Союзе считался вторым антихристом, потому что его критиковал Ленин за махизм. Вот эта фраза (с: 15):

*Единство всей науки (всё-таки, данной науки) состоит только в её методе.*

Многочисленные давнишние отрицания самостоятельности статистики, которая лишена собственного предмета, отпадают. Медицинская статистика оказывается приложением статистического метода к медицине, теория ошибок (которой статистики не занимаются), её приложением к обработке наблюдений и т. д.

Методом статистики может служить только её теория, современное понятие о которой предложили только Фишер и Госсет (Стьюдент), хотя уже Шлёцер в 1804 г. озаглавил свою книгу *Теория статистики*, а её значение подчеркнул Пуассон (Шейнин 2019, с. 145).

И статистика определяется её теорией и, косвенно, приложениями этой теории.

### III

П. П. Пермяков

**Из истории комбинаторного анализа.  
О развитии метода производящих функций  
до середины XIX в.**

*История и методология естеств наук, т. 25, 1980, с. 121 – 131*

Значительную и самую раннюю по возникновению часть комбинаторного анализа составляют методы перечисления. Основным из них является метод производящих функций<sup>1</sup>, применению которого посвящена обширная литература. Но его происхождение и развитие освещено пока недостаточно. Обычно считают, что этот метод восходит к Эйлеру и Лапласу (Berge 1968, с. 6), хотя иногда можно найти утверждения о том, что первым его применил Муавр (Seal 1949, с. 209/1977, с. 67).

Мы кратко рассматриваем предысторию, возникновение и развитие до середины XIX в. метода производящих функций, а именно его применение к решению комбинаторных задач в различных разделах математики. Мы пользуемся более коротким, но не вполне точным выражением *метод производящих функций в комбинаторном анализе*.

**1. О предпосылках создания метода производящих функций.** Возникновение метода производящих функций явилось закономерным итогом накопления и развития различных приёмов решения перечислительных комбинаторных задач. Они долгое время составляли почти всё содержание комбинаторики. Известно (Кутлумуратов 1964, гл. 8; Рыбников 1972, гл. 1, 2), что элементарные предложения комбинаторики появились очень давно и практически совпали с первыми этапами формирования теоретических представлений в математике. Комбинаторные



факты накапливались и и применялись долгое время, создавая предпосылки формирования комбинаторной теории. В течение XVII в. в развитии комбинаторного анализа на смену разрозненной совокупности комбинаторных задач, которые решались индивидуальными приёмами, пришло их общетеоретическое рассмотрение. Комбинаторика формировалась многими путями. Мы проследим этот процесс на типичном примере, на подсчёте числа возможных исходов при броске нескольких игральных костей. (Это удобная модель для многих комбинаторно-вероятностных задач.)

Первые известные подсчёты относятся к X – XI вв. (Майстров 1967, с. 20)<sup>2</sup>. Начиная с того времени, многие авторы решали разрозненные задачи о числе способов выпадения той или иной суммы очков при данном (не свыше трёх) количестве обычных игральных костей (там же, гл. 1). Первое полное систематическое решение этой задачи видимо дал Галилей в работе *О выходе очков при игре в кости* (там же, гл. 1, п. 5), год написания неизвестен.

[Приведена таблица<sup>3</sup> возможных комбинаций очков и числа способов выпадения каждой при броске трёх костей для сумм очков от 3 до 10.] Вторая половина таблицы для сумм очков 11 – 18, как заметил Галилей, была бы симметрична первой.

Независимо от Галилея аналогичное решение дал Гюйгенс. Его сочинение *О расчёте в азартных играх* перепечатал Якоб Бернулли (1713, часть 1; немецкий перевод 1899, перепечатка 1999; русский перевод **S, G, 24**) [с существенными комментариями]. Бернулли предложил более совершенный метод решения с помощью специальной таблицы при бросках нескольких (до шести) костей. Метод построения таблицы был индуктивный с переходом от  $n - 1$  костей к  $n$  костям. Он дал также некоторые пояснения. Подчеркнём, что

1. Его таблица служит не только для хранения и

систематизации результатов, как это было у Галилея, но главным образом для их получения. В этом они сходны, например, с треугольником Паскаля.

**2. Рекуррентный способ построения таблицы в точности соответствует последовательному вычислению коэффициентов в разложении  $(x + x^2 + \dots + x^6)^n$  через разложение  $(x + x^2 + \dots + x^6)^{n-1}$ . Отсюда только один шаг до идеи производящей функции. Его, однако, Бернулли так и не сделал.**

Метод Бернулли исключил прямое перечисление возможных комбинаций, без чего не могли обойтись его предшественники, но всё же требовал составления довольно громоздкой таблицы с целым массивом результатов, если даже требовалось найти только один из них.

Дальнейшее продвижение могло быть достигнуто введением производящих функций, для чего уже сложились все необходимые предпосылки, собственно комбинаторные (накопление и развитие приёмов решения комбинаторных задач) и общематематические (широкое распространение буквенной символики, развитие приёмов оперирования с формальными степенными рядами, обобщение теоремы о биноме и т. п.).

## **2. Первые применения метода производящей функции.**

Самая ранняя известная нам формулировка идеи производящей функции принадлежит Лейбницу, основоположнику комбинаторики как самостоятельной науки. В рукописи 1676 или 1700 г. содержатся следующие рассуждения (Knobloch 1973, с. 229):

*Искомое число перестановок данного вида совпадает со значением коэффициента (при члене) того же вида в степени однородного многочлена. Например, если  $x = a + b + c + \dots$  то будет  $x^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + \dots$  Так, число 6 есть число перестановок вида  $a^5b$  и 15 – число перестановок вида*

$a^4b^2$ .

Позднее Монмор, во втором издании (1713, с. 34) своей книги, переоткрыл этот результат:

*Коэффициенты некоторого многочлена  $q$ , возведённого в степень  $p$  [т.е. многочлена  $(a + b + c + \dots)^p$ , где в скобках заключено  $q$  членов П. П.] совпадают соответственно с числами различных комбинаций некоторого числа  $p$  костей, имеющих некоторое число граней  $q$ . Это является новой и очень важной теоремой, которую я широко применяю ... к исчислению случаев для костей и к теории комбинаций и многочленов, возведённых в произвольную степень.*

Монмор считал *новой и очень важной теоремой* именно её общий случай для произвольного многочлена. Её частный случай для бинома видимо был известен гораздо раньше не только Монмору, но, например, Арбутноту (1712) и Муавру (1712).

Говоря современным языком, речь идёт о применении обычной производящей функции многих переменных. Но дальше этой теоремы Монмор не пошёл, возможности метода он в достаточной мере не осознал. Он (1713, с. 46) дал общую формулу для числа способов получения  $p$  очков при одном броске  $d$   $f$ -гранных костей, которую вывел остроумным, но громоздким и трудоёмким методом. Он выписал в специальную таблицу все возможные комбинации для трёх костей и на этом частном примере подметил общие закономерности.

Гораздо более простой вывод этой формулы с помощью производящей функции одной переменной дал лишь Муавр 20 лет спустя, см. п. 3. Более трудную задачу о числе способов получения  $p$  очков при выборе трёх карт из 30, из трёх колод по 10 карт, помеченных числами от 1 до 10, Монмор (с. 62) и вовсе не сумел решить в общем виде и ограничился рецептом для составления списка всевозможных комбинаций. Решение этой задачи является частным случаем

результатов Эйлера, полученных им 30 лет позже, через производящую функцию двух переменных, см. п. 3.

В заключение отметим, что *теорема Лейбница – Монмора* может применяться как к исчислению случаев для костей и теории комбинаций (как некий аналитический метод в комбинаторике), и к теории многочленов, возведённых в произвольную степень (как некоторый комбинаторный метод в применении к формально-аналитическим выкладкам).

Первое направление это путь развития метода производящих функций. Второе направление достигло вершины к концу первой четверти XIX в. в комбинаторной школе К. Ф.

Гинденбурга. Особенность его подхода, как известно (Кутлумуратов 1964, гл. 8; Рыбников 1972, гл. 3), состояла в построении общих формул, которые позволяли отказаться от рекуррентностей при возведении рядов в степень или при их обращении и т. д. При поисках этих формул он применял комбинаторные приёмы, основанные на тех соображениях, что если, скажем, речь идёт о перемножении рядов, то коэффициентами произведения будут комбинаторные объекты, составленные из коэффициентов рядов. В зависимости от вида рядов получались сочетания с повторениями, с определённой суммой и пр. Мы это направление не рассматриваем.

**3. Дальнейшее развитие и применение метода производящих функций в XVIII в.** Муавр (1730, с. 191 – 197) применил метод производящих функций для доказательства формулы числа способов получения  $p$  очков при одном броске  $d$   $f$ -гранных костей. В современных обозначениях его формула такова [...] Муавр доказывает, что полученное им выражение совпадает с коэффициентом при  $r^{p-d}$  в разложении  $(1 + r + r^2 + \dots + r^{f-1})^d$ . Это сумма членов геометрической прогрессии  $(1 - r^d)^d(1 - r)^{-d}$  и Муавр применяет формулу бинома к каждому сомножителю. Интересно его

истолкование переменной  $r$ .

*Представим кость только одной гранью, отмеченной единицей, столько граней, помеченных двойкой, сколько единиц в  $r$ ; столько граней, помеченных тройкой, сколько единиц в  $r^2$  ...* Таким образом,  $r$  считается натуральным числом, что, впрочем он никак не использует и оперирует с ним как с абстрактным алгебраическим символом.

Следуя Муавру, Симпсон (Seal 1949, pp. 211 – 213/1977, pp. 69 – 71) применил метод производящих функций в теории ошибок для дискретного случая<sup>4</sup>, используя аналогию с задачей о выпадении данной суммы очков при броске некоторого числа костей с соответствующим числом граней.

Особо следует остановиться на результатах Эйлера (Башмакова и др. 1972, р. 108)<sup>5</sup>. В письме от 27 августа 1740 г. Ф. Ноде младший предложил ему две задачи:

Сколькими различными способами данное число можно получить сложением данного числа неравных целых чисел.

Сколькими различными способами данное число  $m$  может быть разбито на  $\mu$  равных или неравных частей или найти, сколькими различными способами может быть получено данное число сложением  $\mu$  целых, равных или неравных чисел.

Эйлер привёл аналитическое решение в ответном письме в сентябре того же года. Его метод был основан на применении производящих функций. Именно, число представлений числа  $n$  суммой  $m$  различных членов ряда  $\alpha, \beta, \gamma$  и т. д. ищется как коэффициент при  $x^n z^m$  в разложении  $(1 + x^\alpha z)(1 + x^\beta z)(1 + x^\gamma z) \dots$  и т. д. Например, в качестве ряда  $\alpha, \beta, \gamma$  и т. д. можно взять весь ряд натуральных чисел.

Аналогично, число способов разбиения числа  $n$  на  $m$  частей, равных или неравных, равно коэффициенту при  $x^n z^m$  в разложении  $(1 - x^\alpha z)^{-1}(1 - x^\beta z)^{-1}(1 - x^\gamma z)^{-1} \dots$  и т. д. Если же число частей не задано, то искомое число разбиений равно коэффициенту при  $x^n$  в соответствующем разложении, где

предварительно положено  $z = 1$ . Из результатов Эйлера легко получить решение упомянутой задачи Монмора: искомое число способов равно коэффициенту при  $x^p z^3$  в разложении  $[(1 + xz)(1 + x^2z) \dots (1 + x^{10}z)]^3$ .

Эйлер применил свой метод к доказательству ряда теорем о разбиении чисел на слагаемые, составил таблицы чисел разбиений и отметил связь табличных и фигурных чисел. Природа переменных  $x$  и  $z$  никак не оговорена. Неявно подразумевается, что это формальные символы, для которых определены формальные операции (сложение умножение и пр.) с естественными алгебраическими свойствами. Сходимость рядов никакой роли здесь не играет. Эйлер значительно развил метод производящих функций, к которому пришёл видимо, независимо от предшественников и систематически пользовался им для решения довольно трудных задач, которые прежде не поддавались решению.

Лагранж (1770 – 1773) применил метод производящих функций к теории ошибок, используя эти функции не только одной переменной, как и Симпсон, но и двух переменных, в духе Эйлера. Он не сослался на предшественников, лишь упомянул теорему Ньютона о биноме, однако очень часто писал *как известно*, использовал, как и Симпсон, аналогию с броском костей, а его стиль рассуждений в сущности таков же, как у Эйлера. Соответствующие работы Эйлера и Симпсона были к тому времени опубликованы, и вряд ли Лагранж не был знаком с ними. Новым, пожалуй, было применение формального дифференцирования для нахождения коэффициентов разложения (1776/1868, с. 209).

В 1777 г. Эйлер комментировал эту работу, но не упомянул о её связи со своими более ранними исследованиями, см. выше<sup>6</sup>.

Метод производящих функций применяли и другие математики того времени. Ламберт (1771), например, пользовался функциями

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{1-x^n}$$

для отыскания числа и суммы делителей  $n$  соответственно.

Из этого и предыдущего параграфа следует, что

1. Метод производящих функций появился задолго до того, как этот термин ввёл Лаплас (1782) и притом намного раньше работ Эйлера и даже Муавра (1712).

2. В течение XVIII в. этот метод применялся довольно широко и был развит относительно высоко.

**4. Теория производящих функций Лапласа.** Он впервые сформулировал свою теорию в мемуаре (1782/1894) и начал с рассуждений о том, что теория рядов является одним из главнейших предметов анализа, ибо все проблемы, сводящиеся к приближениям, и, следовательно, почти все приложения математики к природе зависят от этой теории. Он предлагает метод оперирования с рядами, который

*Основан на рассмотрении того, что я называю производящими функциями. Это некоторый новый вид исчисления, который можно назвать исчислением производящих функций.*

Далее он указывает на возможности применения этого исчисления к интерполяции рядов, интегрированию конечно-разностных и дифференциальных уравнений и к анализу случаев. Следует определение (с. 5 – 6):

*Пусть  $y_x$  некоторая функция от  $x$ ; если построить бесконечный ряд*

$$y_0 + y_1 t + y_2 t^2 + \dots + y_x t^x + y_{x+1} t^{x+1} + \dots + y_{\infty} t^{\infty}$$

*и обозначить через  $u$  его сумму, или, что сводится к тому же, функцию, разложение которой образует этот ряд, то эту функцию я называю производящей функцией переменной  $y_x$ . Она таким образом является некоторой функцией  $t$ , которая после её разложения по степеням  $t$ , имеет эту переменную  $y_x$*

*коэффициентом при  $t^x$ . Аналогично, переменная, соответствующая некоторой производящей функции, есть коэффициент при  $t^x$  в разложении этой функции по степеням  $t$ .*

Схоже определялись производящие функции двух и более аргументов, т. е. для многоиндексных последовательностей.

Лаплас рассмотрел, как преобразуется производящая функция при преобразовании переменной  $u_x$ . Мы приведём эти результаты в табличной форме. [...]

Нетрудно убедиться в том, что переменные являются коэффициентами при  $t^x$  в разложении соответствующих выражений. Лаплас утверждает, что эти соотношения верны и для дробных и даже иррациональных значений  $t$ ,  $s$  и  $r$ . Он не пояснил своего утверждения, но видимо  $\Delta^t (y_{x-r} - y_{x-\Delta x-r})^s$  при нецелых  $t$ ,  $s$  и  $r$  следует понимать как соответствующий член в разложении, если такое разложение возможно. В большей части мемуара Лаплас применяет изложенный метод к теории рядов.

В лекции *О вероятностях* в Нормальной школе Лаплас (1795/1912, с. 154 и 157) сформулировал своё понимание предмета теории производящих функций и новую, более широкую трактовку термина *исчисление производящих функций*:

*Эта теория имеет своим предметом отношения коэффициентов при степенях некоторой неопределённой переменной в разложении некоторой функции от этой переменной к самой функции. ... Теорию производящих функций и теорию приближений для формул, которые являются функциями весьма больших чисел<sup>7</sup>, можно рассматривать как две ветви единого исчисления, которые я называю исчислением производящих функций.*

Затем Лаплас (1809/1912) в разделе *Об исчислении производящих функций* пишет:

*Предмет этого исчисления состоит в сведении к*



*простому разложению функций всех операций, касающихся разностей, и особенно интегрировании уравнений в обыкновенных и частных разностях. Вот в чём основная идея.*

В мемуаре (1811/1898, с. 360) Лаплас повторил опубликованное им ранее и особо остановился на применении производящих функций в теории вероятностей:

*Исчисление производящих функций является фундаментом некоторой теории о вероятностях, которую я предполагаю скоро опубликовать. Вопросы о случайных событиях чаще всего легко сводятся к уравнениям в разностях. Первая ветвь этого исчисления даёт их самые общие и самые простые решения.*

Все исследования Лапласа по производящим функциям вошли затем в его *Аналитическую теорию вероятностей* (1812/1884). См. Sheynin (1973) о мере, с которой производящие функции послужили фундаментом теории вероятностей Лапласа.

С точки зрения общей комбинаторной теории значение теории производящих функций состоит в том, что впервые было явно сформулировано понятие производящей функции и появилась соответствующая терминология. Были рассмотрены некоторые общие свойства этих функций и введён символический аппарат.

Лаплас завершил первый этап развития метода производящих функций, однако

**1.** Он не ставил целью развитие метода производящих функций как средства решения комбинаторных задач. В своей теории он видел чуть ли не основу всего математического анализа (а позднее и теории вероятностей), комбинаторным же её применениям отводил лишь иллюстративную роль.

**2.** Теория производящих функций в том виде, в котором её сформулировал Лаплас, была весьма уязвима; в

математическом анализе переменную  $t$ , конечно же, нельзя было считать чисто абстрактным символом, притом требовалось исследование сходимости ряда.

Вронский, младший современник Лапласа, посвятил целую книгу (1819) критике лапласовой теории производящих функций. Он указал на недостаточность знаний о рядах<sup>8</sup> (в те времена так оно и было) и ещё большую неясность и необоснованность при рассмотрении отрицательных, дробных, трансцендентных, мнимых  $x$ . Но теория, претендующая на роль основы всего анализа, по мнению Вронского должна допускать максимальную общность. Что же касается специфически дискретных комбинаторных задач, то Вронский считал, что для анализа и математики вообще они представляют слишком незначительный интерес.

**5. О методе производящих функций в комбинаторном анализе начала и середины XIX в.**

Алгебра обычных производящих функций одной переменной называется алгеброй Коши (Bell 1923; Riordan 1958; Рыбников. 1972).

Судя по всему, имеются в виду теоремы о сходимости суммы и произведения рядов (Cauchy 1821/1897, p. 140):

**Теорема 3.** Предположим, что два ряда

$$a_0, a_1x, a_2x^2, \dots, a_nx^n, \dots; b_0, b_1x, b_2x^2, \dots, b_nx^n, \dots$$

сходятся при некотором значении  $x$  и их суммы равны  $S_1$  и  $S_2$ .

Тогда

$$a_0 + b_0, (a_1 + b_1)x, (a_2 + b_2)x^2, \dots, (a_n + b_n)x^n, \dots$$

будет при тех же условиях новым сходящимся рядом, сумма которого равна  $(S_1 + S_2)$ .

**Теорема 4.** Пусть выполнены условия Теоремы 3. Тогда

$$a_0b_0, (a_0b_1 + a_1b_0)x, (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2, \dots,$$

$$(a_0b_n + a_1b_{n-1} + \dots + a_nb_0)x^n, \dots$$

будет новым сходящимся рядом с суммой  $S_1S_2$ .

Эти теоремы, разумеется, имеют отношение к изоморфизму между алгеброй последовательностей и алгеброй их производящих функций, но сам Коши никакой алгебры производящих функций не строил и даже не пользовался термином *производящая функция*, хотя в какой-то мере использовал. Например,

*Фигурными числами первого, второго, третьего и т. д. порядка называются коэффициенты при последовательных степенях  $x$  в разложениях выражений  $(1+x)^{-2}, (1+x)^{-3}, (1+x)^{-4}, \dots$*

Иначе говоря, эти выражения являются производящими функциями фигурных чисел соответствующего порядка.

Применение метода производящих функций можно обнаружить и в работах других математиков XIX в. Так, со ссылкой на Эйлера, Абель (?/1839, с. 224)<sup>9</sup> фактически выписал экспоненци-альную производящую функцию для чисел Бернулли. [...] А в одном из его посмертных мемуаров встречается термин *производящая функция*, однако по другому поводу.[...]

Лежандр (1830) кратко изложил результаты Эйлера о разбиении чисел на слагаемые со ссылкой на его *Введение в анализ бесконечных*, полученные с применением производящих функций, но без упоминания этого термина.

Буняковский (1846) систематически применял производящие функции, но не сам термин. Он упомянул теорию Лапласа (и его вклад в теорию вероятностей вообще) в историческом обзоре, но воздержался от комментариев.

[Дальнейшее изложение автора представляет немалый интерес, но круг читателей окажется намного Уже, и мы на этом заканчиваем перепечатку его статьи.]

## Примечания

1. Обычной производящей функцией для последовательности  $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$  называется формальная сумма

$$A(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n + \dots$$

Экспоненциальной производящей функции для той же последовательности называется (Riordan 1958, с 19)

$$E(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n / n! + \dots$$

Многие авторы с самого начала считают  $t$  действительной или комплексной переменной, оговаривая сходимость соответствующих рядов.

2. Майстров не обосновал этого утверждения.

3. Таблицу 1 привёл Галилей (1718, посмертная публикация 1962), и скопировал Майстров.

4. Теории ошибок ещё не существовало ни тогда, ни в 1776 г., см. ниже. В 1757 г. Симпсон рассмотрел предельный непрерывный случай.

5. Автор процитировал примечание F. Rudio, см. с. 310 русского издания *Introductio* Эйлера.

6. Мемуар Лагранжа очень интересен с общей математической точки зрения. Он первым применил интегральные преобразования, ввёл (в Проблеме 6) уравнение многомерного нормального распределения, также термин *кривая возможностей ошибок* и предвосхитил характеристические функции при исследовании *производящего интеграла* (Seal 1949, p. 214/1977, p. 72; Freudenthal & Steiner 1966, p. 170; Sheynin 1973, § 2).

7. Это функции типа

$$\int x^p (1-x)^q dx$$

при больших значениях  $p$  и  $q$  (например, число мужских и женских рождений во Франции за много лет). Пределы интегрирования определялись по Бейесу.

8. Серии фактически были последовательностями.

9. Во многих случаях, и здесь тоже, автор не привёл дат первоначальных публикаций. *Oeuvres Complètes* (1839) Абеля были переизданы в 1881 г., быть может с некоторыми изменениями.

## Библиография

**Башмакова И. Г., Ожигова Е. П., Юшкенч А. П.** (1972), Теория чисел. В книге *История математики*, т. 3. М., с. 101 – 125.

**Буняковский А. Я.** (1846), *Основания математической теории вероятностей*. СПб.

**Кутлумуратов Г.**, (1964), *О развитии комбинаторных методов математики*. Нукус.

**Майстров Л. Е.** (1967), *Теория вероятностей. Исторический очерк*. М.

**Рыбников К. А.** (1972), *Введение в комбинаторный анализ*. М.

**Abel N. H.** (1839), *Oeuvres Complètes*, t. 2. Christiania, 1881.

**Arbuthnot J.** (1712), An argument for divine Providence taken from the constant regularity observed in the birth of both sexes. Reprint: Kendall M. G., Plackett R. L. (1977, pp. 30 – 34). **S, G**, 14.

**Bell E. T.** (1923), Euler algebra. *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 25, pp. 135 – 154.

**Berge C.** (1968), *Principes de combinatoire*. Paris.

**Bernoulli J.** (1713), *Ars conjectandi. Werke*, Bd. 3. Basel, 1975, pp. 107 – 259. Нем. перевод (1899): *Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Frankfurt/Main, 1999. *Искусство предположений*, часть 4-я, 1913. В книге автора (1986), О законе больших чисел. М., с. 23 – 59.

**Cauchy A. L.** (1821), *Course d'analyse de l'Ecole Royale Polytechnique*, pt. 1. *Oeuvr. Compl.*, sér. 2, t. 3. Paris, 1897.

**De Moivre A.** (1712, латин.), De mensura sortis, or, On the measurement of chance. *Intern. Stat. Rev.*, vol. 52, 1984, pp. 236 – 262. Комментарий (A. Hald):

pp. 229 – 236. **S, G**, 14

--- (1730), *Miscellanea analytica*. London. Франц. перевод: Париж, 2009.

**Euler L.** (1748, Latin), *Introduction to Analysis of the Infinite*, Book 1. New York, 1988. *Введение в анализ бесконечных*, т. 1. М., 1961.

--- (написано 1777; 1788), *Eclaircissements sur le mémoire de La Grange* [...]. *Opera Omnia*, ser. 1, t. 7. Leipzig – Berlin, 1923, pp. 425 – 434.

**Freudenthal H, Steiner H.-G.** (1966), Die Anfänge der Wahrscheinlichkeitsrechnung. In *Grundzüge der Mathematik*, Bd. 4. Editors, H. Behnke et al. Göttingen, pp. 149 – 195.

**Galilei G.** (1718, посмертно, итал.), *Sopra el scoperte dei dadi*. Англ. перевод без англ. заглавия: E. H. Thorne в книге David F. N. (1962), *Games, Gods and Gambling*. London, pp. 192 – 195.

**Kendall M. G., Plackett R. L.** (1977), *Studies in the History of Statistics and Probability*, vol. 2. London.

**Knobloch E.** (1973), *Die mathematischen Studien von G. W. Leibniz zur Kombinatorik*. Wiesbaden.

**Lagrange J. L.** (1776), Sur l'utilité de la méthode de prendre le milieu entre les resultats de plusieurs observations. *Oeuvres*, t. 2. Paris, 1868, pp. 173 – 236.

**Lambert J.-H.** (1771), *Anlage zur Architektonik*, Bd. 2. *Phil. Schriften*, Bd. 4. Hildesheim, 1965.

**Laplace P. S.** (1782), Sur les suites. *Oeuvr. Compl.*, t. 10. Paris, 1894, pp. 1 – 89.

--- (читано 1795; 1800), Leçons de mathématiques professées à l'Ecole Normale en 1795. *Oeuvr. Compl.*, t. 14. Paris, 1912, pp. 10 – 177. *Лекция о вероятности на с.* 146 – 177.

--- (1809), Sur divers points d'analyse. Там же , pp. 178 – 214.

--- (1811), Sur les intégrals définies. *Oeuvr. Compl.*, t. 12. Paris, 1898, pp. 357 – 412.

--- (1812), *Théorie analytique des probabilités*. *Oeuvr. Compl.*, t. 7. Paris, 1884.

**Legendre A. M.** (1830), *Théorie des nombres*, t. 2. Paris.

**Montmort P. R.** (1708), *Essay d'analyse sur les jeux de hazard*. Paris, 1713. New York, 1980. **S, G**, 14 (предисловие).

**Riordan J.** (1958), *Introduction to Combinatorial Analysis*. New York.

**Seal H. L.** (1949), The historical development of the use of generating functions in probability theory. *Bull de l'Association des Actuairees Suisses*, t. 49, pp. 209 – 228. Перепечатка: Kendall & Plackett (1977, pp. 67 – 86).

**Sheynin O. B.** (1973), Finite random sums. A historical essay. *Arch. Hist. Ex. Sci.*, vol. 9, pp. 275 – 305.

**Wronski H.** (1819), *Critique de la théorie des fonctions génératrices de Laplace*. Paris.

## IV

К.-Р. Бирман

### Задачи генуэзского лото в работах классиков теории вероятностей

Историко-математич. исследования, вып. 10, 1957, с. 649 – 670  
Перевод с нем. Ж. М. Гречаника

#### Параграф 1

Среди задач, возникающих в азартных играх, игра в кости, в *орла или решку*, в карты и пр., и рассмотренных в основоположных работах по теории вероятностей<sup>1</sup>, уже весьма рано задачи числовой лотереи заняли определённое место, изучаемая нами азартная игра сначала называлась *лото*. Слово *лотерея* в то время означало розыгрыш определённого количества денежных выигрышей при твёрдо установленном числе разыгрываемых в тираже номеров. Однако, со временем стало обычным именовать числовое лото также *числовой лотереей*. Мы поэтому используем оба наименования без различия.

Точная дата возникновения числового лото не установлена. Известно только, что ещё до 1620 г., который считается годом появления этой игры<sup>2</sup>, в Италии, колыбели лото<sup>3</sup>, во время выборов и при других событиях, привлекающих внимание публики, заключались пари. Днём, когда в документе впервые упоминается лото, является 9 февраля 1448 г<sup>4</sup>. Во второй половине XVI в. в Генуе организация пари *sponsiones Genuensos* стала своего рода предприятием. Поводом послужил ежегодный выбор по жребию пятерых сенаторов из ста в *serenissimo collegio* (в *светлейшую коллегию*<sup>5</sup>). Игрок указывал фамилии сенаторов, которые по его предположению будут избраны таим путём.

Если одно или несколько указанных имён назывались

верно, игрок выигрывал по уставленному порядку некоторую сумму, кратную его ставке, в противном случае ставка пропадала. В 1620 г. 100 фамилий сенаторов заменили числами от 1 до 90. В соответствии с местом своего возникновения игра стала именоваться *генуэзским лото*.

В первое время организация лото находилась в руках богатых купцов (*mercatores opulenti*), но вскоре государство оценило этот источник дохода и взяло организацию лото в свои руки.

После 1620 г. числовое лото в Италии широко распространилось<sup>6</sup>. Спустя некоторое время лото прочно утвердилось и за пределами этой страны. 18 августа 1751 г. первое числовое лото было передано в концессию в Австрию, в Вену<sup>7</sup>. В 1757 г. числовая лотерея была введена в Париже, а в 1771 г. в Германии [в немецких государствах] существовало уже 26 числовых лотерей<sup>8</sup>. Одновременно усиливались протесты против этой игры. Так, в одной итальянской книге, вышедшей в 1769 г., возникновение этого *уже неугасимого огня* приписывалось пагубным талантам некоего арифметика, имя и национальность которого неизвестны<sup>9</sup>. Во многих местах вся жизнь сосредоточивалась вокруг лото. Так в 1795 г. в городе Лукенвальде игорная горячка распространилась настолько, что все только и толковали и обсуждали лотерейные числа.

За спиной своих мужей жёны залезали в долги, чтобы сдать билеты с предположениями о выигрышах. Об этом сообщил Варшауер<sup>10</sup> на основании одного официального документа. Мужчины совершали растраты, и в оправдание заявляли, что им ночью явился *святой дух* и написал на стене номера, которые выиграют в следующем тираже. В Гамбурге в 1770 и 1771 гг. выходил специальный еженедельник *Лотология* (*Lottologie*<sup>11</sup>). Папа Бенедикт XIII (1649 – 1730) запретил католикам участвовать в лото, но его преемник Клементий XII (1652 – 1740) организовал собственную числовую



лотерею.

Несмотря на распространение игровой горячки, народ понял сущность лотереи. В Италии повсюду рассказывали, как город-ской советник Бенедетто Джентиле из Генуи был схвачен дьяволом зато то, что избрёл лото<sup>12</sup>. В Берлине распевали песенку;

*Die Pest gab die Natur dem Oriente/unbillig ist sie nie  
Dafür gab sie dem Okzidente/die Zahlenlotterie*<sup>13</sup>.

В 1810 г. в Пруссии после 799 тиражей числовое лото ликвидировали<sup>14</sup>. В 1861 г. прекратилось последнее немецкое числовое лото в Баварии и то же произошло в Венгрии в 1897 г<sup>15</sup>., но в Италии и Австрии оно продолжалось.

В последнее время в Германии вновь созданы и весьма популярны числовые лотереи, две в Берлине и одна в ГДР, но их условия изменились.

## Параграф 2

Необходимо различать три указанных условий игры. В основе наших исследований лежали лишь первые два. Но третий действует и ныне.

1. Игрок держит пари на то, что появится пять названных им номеров. Размер выигрыша зависит от того, в скольких случаях это произойдёт (самое большее, в пяти) и от заранее установленной кратности ставки. Она в свою очередь зависит от предположенного игроком числа выпадений. Ограничения этого числа не предусмотрено. Этот тип пари существовал в первом периоде существования лотереи в Италии.

2. В дальнейшем во всех странах установились примерно такие правила игры. Игрок выбирает одну из описанных ниже заявок, причём участие в одном виде не исключает участия в другом.

а) Указанное число находится среди пяти выигравших (простое извлечение, *estrado semplice*, *extrait simple*, *einfacher Auszug*, *unbestimmter Auszug*, *Ruf*,

б) Игрок предполагает, что избранное им число появится среди выигравших в указанном им порядке (определённое извлечение, *estrado determinato, extrait déterminé, bestimmter Auszug, Ruf, Nominat*).

с) Игрок указывает числа, которые появятся среди выигравших, *ambo* (латинское *оба*). Во Франции существовало также определённое *амбо*, *ambes déterminés*.

д) При игре *terno* (по три) игрок указывает три числа

е) *Quaterno* (по четыре). Аналогично указываются 4 числа.

ф) *Quinterno* (по пять). Указываются все пять чисел.

Последние две игры допускались не во всех странах. Не всюду была установлена наименьшая ставка. В некоторых странах ставка ограничивалась.

Выигрыши колебались примерно в следующих границах (указана кратность ставки по порядку перечисленных вариантов) 14 – 15; 70 – 75; 240 – 270; 4800 – 5500; 60 – 70 тысяч; 1100 тысяч

Были и крайне низкие выигрыши (например, в Папском государстве) и чрезвычайно высокие, как в Сардинии<sup>16</sup>.

**3.** В современных немецких лотереях игрок выбирает 5 номеров из 90. Число подобных заявок не ограничено, и в этом отношении современная лотерея совпадает с первоначальной. В остальном существует принципиальное различие между ними.

В современной лотерее ставка ограничена 0,5 немецкой марки за билет. Выигрыши зависят от числа поданных заявок, и они распределены по четырём разрядам (по пяти номерам, четырём, трём номерам и двум номерам). Лотерейное предприятие в финансовом отношении не рискует.

### **Параграф 3**

Перейдём к классическим исследованиям. В первую очередь назовём работу Николая I Бернулли<sup>17</sup> *Примеры применения искусства предположения к правовым вопросам*.

Автор касается *чрезвычайно прославившегося геновского лото* и упоминает первые условия игры; заявка на пятерых из 100. Он получает от проводящих игру богатых купцов выигрыш, если один из названных им будет избран. Выигрыш тем больше, чем больше совпадений. Н. Б. устанавливает справедливый выигрыш. Пусть  $a$  = ставка, равная единице,  $g_i$ , справедливые выигрыши при одном, двух, ..., пяти совпадениях и  $e_i$ , соответствующие числа случаев<sup>18</sup>;  $e_0$ , число случаев без совпадений. Ожидание выигрыша равно [автор выписывает формулу обобщённого среднего арифметического и приравнивает его к  $a$ ].

Значения  $e_5$  и пр. Н. Б. получает *с помощью известных правил соединений*. Он явно не указывает, как получены приведённые им числа, правила же были ему известны из *Искусства предположений* его покойного дяди. Во второй части мы находим решение такой задачи<sup>19</sup>. Среди  $n$  элементов, из которых образуются сочетания по  $r$  элементов без повторений, имеется  $t$  отмеченных. Ищется число сочетаний, в которых содержатся  $p$  из этих  $t$  элементов, но без остальных. [Следует элементарный подсчёт по известным правилам.]

Найденные результаты Н. Б. использует, чтобы показать, насколько обманывают публику богатые купцы<sup>20</sup>.

В своём *Опыте* Лаплас касается лотереи и невыгодного для игрока соотношения между его шансами и шансами организаторов лотереи<sup>21</sup>. Он (1812/1886, с. СХII) также упоминает широко распространённое заблуждение, что долго не выходящий номер должен впредь выйти скорее остальных номеров. С другой стороны, игроки комбинируют также и наиболее часто выходящие номера. [...]

Другой вопрос связан с определением вероятности появления при одном тираже двух или нескольких следующих подряд чисел. Этой проблемой занялся Эйлер, который заметил, что на пути к решению встречаются

величайшие препятствия<sup>22</sup>. Он вычисляет при  $r = 2$ . доходит до  $r = 6$  даёт общий ид решения и применяет его к  $r = 7$ . Вот индуктивно найденные им общие решения специальные числовые значения для лото.

Вероятность того, что среди  $r$  номеров одного тиража нет ни одной последовательности Эйлер, выражает формулой

$$P_s = \frac{(n-r)(n-r-1)(n-r-2)\dots(n-2r+2)}{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+2)} = \frac{C_{n-r+1}^r}{C_n^r}.$$

[Следуют вычисления в числах и некоторые рассуждения.]

Далее Эйлер определяет число возможностей среди всех видов последовательностей. [Дальнейшее описание мы оставляем в стороне. Переписанный нами материал даёт представление о сути дела а в Библиографии мы сохраняем все указанные в ней источники.]

### Примечания

1 Ср., например, К.-R. Biermann Über eine Studie von Leibniz zu Fragen der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Forschungen und Fortschritte*, Bd. 29, 1955, pp. 110 – 113.

2. Moritz Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*. Leipzig, 2.III.1900, p. 336. O. Wahrchauer, *Die Zahlenlotterie in Preußen*. Leipzig, 1885,

p. 7. Зигхарт ошибочно называет годом проведения первых игр в лото 1720 г. R. Sieghart, *Geschichte und Statistik des Zahlenlotos in Österreich, Freiburg, Leipzig und Tübingen*. 1898, p. 5.

3. P. Coste, *Les loteries d'état en Europe et la loterie nationale*. Paris, 1933.

4. C. Weidlich, *La questione del lotto*. Palermo, 1922. Автор приводит подробный список итальянской литературы по лотерее.

5. Но Нина (Nina), которого цитирует Вейдхих (см. Прим. 4), указывает, что имелось 120 кандидатов, а пари начали заключать примерно в 1576 г.

6. Подробнее см. Вейдхих (Прим. 4).

7. Зигхарт (Прим. 2), с. 11. Первую привилегию на лото получил в Австрии итальянский граф О. ди Кательди, а позднее в Пруссии Е. А. Кальцабиги. Дату 13 ноября 1751 г., которую привёл Эндеман (Fr. Endemann, *Beiträge zur Geschichte der Lotterie*. Berlin, 1899, с. 74),

относится к патенту (*Codex austriacus*, Bd. 3, с. 66 и след.).

8. Варшауэр (Прим. 2), с. 12.

9. P. P. Rodotà, *De 'ginochi d'industria, de sorte e misti, di quello in particolare, che si denomina Lotto de Genova*. Roma, 1769, p. 27. oma, 1769, p. 27.

10. O. Wahrschauer, *Lotteriestudien*. Берлин, 1912, с. 59 и след.

11. Ср. Эндеман (Прим. 7), с. 75.

12. Зигхарт (Прим. 3), с. 5.

13. Wahrschauer (Прим. 10), с. 61:

Природа наделила Восток чумой, /но она всегда справедлива  
и наделила Запад/числовой лотереей.

14. Варшауэр (Прим. 10), с. 52.

15. Лото стало предметом множества обвиняющих и защищающих писаний. Поэты воспевали лото, публиковались рецепты выигрышей. В парламентах произносились пламенные речи за и против лото и пр. Много дальнейших литературных указаний см. в названных нами источниках.

16. По Зигхарту (Прим. 2) и Варшауэру (Прим. 2). Мы не останавливаемся на таких частностях как [...] или ограничение ставок, уменьшение выигрыша, если ставки, разыгранные на *терно*, содержат более трёх чисел. См. приведённую нами литературу.

17. Мы излагаем по *Acta Eruditorum*, Suppl., t. 4, с. 159 и след., с. 167 и след. Лейпциг, 1711.

18. Здесь и в других работах буквенные обозначения изменены. Мы стремились придерживаться оригинала, но, чтобы облегчить понимание, позволили себе развить рассуждения Н. Б.

19. *Искусство предположений*, с. 105 и след.

20. По Варшауэру (Прим. 3), с. 6 выигрыши при единичной ставке составляли 20 000 при пяти совпадениях, 5 – 6 тысяч при четырёх, 500 – 600 при трёх. Источник не указан.

21. Об огромных доходах арендаторов или государства, например, в Австрии и Пруссии, см. у Зигхарта и Варшауэра.

22. L. Euler, *Sur la probabilité des séquences dans la lotterie Génoise*. 1767. *Opera omnia*, ser. 1, t. 7. Leipzig – Berlin, 1923, pp. 113 – 152.

## Библиография

**Шейнин О. Б., Sheynin O.** (2007), Euler's work in probability and statistics. In *Euler Revisited. Tercentenary Essays*. Editor R. Baker. Heber City, Uta, pp. 281 – 316.

**Beguelin N. de** (1767), *Sur les suites ou séquences dans la loterie de Genes*. *Hist. Acad. Roy. Sci. et Belles-Lettres Berlin*, année 1765, pp. 231 – 280.

**Bernoulli Jakob** (1713), *Ars Conjectandi*. Basel. Reprinted in author's book (1975, pp. 107 – 259). German transl. (1899): Frankfurt/Main, 1999.

--- (1975), *Werke*, Bd. 3. Basel.

**Bernoulli Jean III** (1771), Sur les suites ou séquences dans la loterie de Genes. *Hist. Acad. Roy. Sci. et Belles-Lettres Berlin*, année 1769, pp. 234 – 253.

**Bernoulli N.** (1709), De usu artis conjectandi in iure. Перепечатано в книге автора (1975, pp. 287 – 326).

**Biermann K.-R.** (1955), Über eine Studie von G. W. Leibniz zu Fragen der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Forschungen und Fortschritte*, Bd. 29, pp. 110 – 113.

**Cantor M.** (1892), *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, Bd. 2, Abt. 3. Leipzig, 1900. [New York, 1965.]

--- (1908), Тот же источник, Bd. 4. Leipzig, 1924. [New York, 1965.]

**Coste P.** (1933), *Les loteries d'état en Europe et la loterie nationale*. Paris.

**De Moivre A.** (1718), *Doctrine of Chances*. Третье издание, 1756, перепечатано: New York, 1967.

**Endemann Fr.** (1899), *Beiträge zur Geschichte der Lotterie*. Berlin.

**Euler L.** (1749), Письмо Фридриху II о Итальянской лотерее. *Opera omnia*, ser. 4A, t. 6. Basel, 1986, pp. 317 – 319.

--- (1767), Sur la probabilité des séquences dans la loterie Génoise. *Opera omnia*, ser. 1, t. 7. Leipzig – Berlin, 1923, pp. 113 – 152.

--- (1785), Solutio quarundam quaestionum difficiliorum in calculo probabilium. Там же, pp. 408 – 424.

--- (1862, зачитано 1763), Réflexions sur une espèce singulière de loterie nommée Génoise. Там же, pp. 466 – 494.

**Laplace P. S.** (1812), *Théorie analytique des probabilités*. Перепечатано в книге автора *Oeuvr Compl.*, t. 7. Paris, 1886.

--- (1868, зачитано 1819), Sur la suppression de la loterie. *Oeuvr. Compl.*, t. 14, 1912, pp. 375 – 378.

**Meyer A.** (1874, франц.), *Vorlesungen über Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Leipzig, 1879. Перевод E. Czuber.

**Nachricht** (1806?), *Nachricht von den Kgl Preuß. Zahlen- und Classen-Lotterien auf das Jahre 1806*. Berlin.

**Poisson S.-D.** (1837), *Recherches sur la probabilité des jugements etc.* Paris. [Paris, 2003.]

**Rodotà P. P.** (1769), *De'giuochi d'industria, di sorte, e misti; di quello in particolare, che si denomina Lotto di Genova*. Roma.

**Sieghart R.** (1898), *Geschichte und Statistik des Zahlenlotos in Österreich*. Freiburg a. o.

**Todhunter I.** (1865), *History of the Mathematical Theory of Probability*.

New York, 1949, 1965.

**Vega G.** (1838), *Vorlesungen über die Mathematik*, Bd. 1. Wien.

**Warschauer O.** (1885), *Die Zahlenlotterie in Preussen*. Leipzig.

--- (1912), *Lotteriestudien*. Berlin.

**Weidlich C.** (1922), *La questione del lotto*. Palermo.